УДК 614.838.44:536.3 DOI: 10.37657/vniipo.avpb.2021.93.59.004

В.Г. ШАМОНИН, вед. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук; С.А. ЗУЕВ, вед. науч. сотр., канд. техн. наук; П.А. ЛЕОНЧУК, нач. сектора; С.Ю. ХАТУНЦЕВА, ст. науч. сотр.; Е.Н. БАРАНОВСКАЯ, науч. сотр. (ФГБУ ВНИИПО МЧС России)

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЛОКАЛЬНЫХ ВАРИАЦИЙ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ПОЖАРНОЙ БЕЗОПАСНОСТИ ОБЪЕКТОВ ЗАЩИТЫ

Применение метода локальных вариаций для решения прикладных задач, в том числе пожарной охраны, может быть сопряжено с преодолением возможных трудностей (как аналитического характера, так и численной реализации). Для последующего использования этого метода проведено его тестирование на так называемых «жестких» примерах, позаимствованных из литературы. Хотя результаты тестирования следует признать не более чем удовлетворительными, применимость метода при решении конкретных прикладных задач можно считать оптимистичной.

Ключевые слова: *метод локальных вариаций, условная и безусловная оптимизация, число обусловленности, регуляризация*

Введение

В статье рассматривается возможность применения метода локальных вариаций (МЛВ) для решения некоторых задач пожарной безопасности, допускающих вариационную формулировку (континуальную или конечномерную).

Выбор МЛВ как метода прямого поиска задачи условной оптимизации (при наличии ограничений) связан с отсутствием необходимости вычисления производных целевой функции (градиента и матрицы Гессе). Это избавляет пользователя от проведения утомительной процедуры получения аналитических или конечно-разностных выражений для указанных производных. Этот выбор, очевидно, также предусмотрен для решения задач недифференцируемой оптимизации.

В п. 1 дано краткое обоснование выбора МЛВ среди других методов прямого поиска; в п. 2 – сложности, которые могут возникнуть при реализации этого алгоритма, а в п. 3 приведены тестирования на примерах с «плохой обусловленностью», взятых из литературы.

1. О выборе метода численной реализации

В работах [1–3] упомянут метод Хука-Дживса, являющегося одним из методов покоординатного спуска и разработанного для задач безусловной оптимизации. В брошюре [1] отмечено: «Поиск состоит из последовательности шагов вокруг базисной точки, за которой в случае успеха следует поиск по образцу». В обобщении метода на случай наличия ограничений [1] «проверяется, каждая ли точка в процессе поиска принадлежит области ограничений. Если нет, то целевой функции присваивается искусственно очень большое значение («штраф»). Т. е. поиск, далее, будет происходить снова в допустимой области в направлении к минимальной точке внутри этой области».

Метод прямого поиска по деформируемому многограннику (метод Нелдера – Мида [1, 2]) является одним из самых эффективных, если число переменных не превышает 6 [1]. Однако он принадлежит к семейству алгоритмов безусловной минимизации и не обобщен на случай наличия ограничений.

В обширной монографии [2] прямому поиску при наличии ограничений посвящена лишь гл. 8, где представлен метод скользящего допуска. Однако его изложение (на с. 25) весьма трудоемко и теоретизировано, блок-схема громоздка, приведен лишь один простой малоразмерный (n = 2) пример реализации. В гл. 4 (Ограничения типа равенств и неравенств) монографии [4] представлены методы штрафных функций, центров и возможных направлений в описаниях теорем существования, алгоритмов реализации фигурируют градиенты, и, по-видимому, их нельзя отнести к методам прямого поиска.

Отнюдь не претендуя на полноту ознакомления публикаций по прямому поиску алгоритмов оптимизации при наличии ограничений, наш выбор был остановлен на МЛВ как одного из методов покоординатного спуска, разработанного авторами [5] для задач теплопроводности, управления и т. д.

Для решения задач минимизации функции нескольких переменных была позаимствована из книги [5] процедура MLV2 (на языке АЛГОЛ-60). Ее «ядро» (с «убранными» операторами и размерами ячеек dx и dy) было использовано как процедура VaryF на языке ТурбоПаскаль-7 для минимизации $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$. Результаты тестирования VaryF представлены в п. 3.

В учебнике [6] дается пессимистический прогноз: «Методы прямого поиска в большинстве случаев очень неэффективны. Обращаться к ним, по-видимому, имеет смысл только тогда, когда есть уверенность, что никакие другие подходы к решению задачи минимизации невозможны».

2. Обусловленность задачи

Следующий вопрос связан с числом обусловленности COND($\vec{X}^{(*)}$) функции $f(x)$ в окрестности точки минимума $\vec{X}^{(*)}$ [7, 8]. В книгах [7, 8] отмечено, что методы решения задачи минимизации, использующие только значения f, не могут, вообще говоря, гарантировать получение приближенного решения $\vec{X}^{(*)}$ с приемлемой точностью: неизбежна потеря примерно половины из того числа верных значащих цифр, которые содержались в приближенных значениях $f(x)$. Это касается так называемых плохо обусловленных алгоритмов минимизации, где COND >> 1. Число обусловленности точки минимума автором [7] определено как

$$\mu = \lim_{\delta \to 0}\left(\sup_{\vec{X} \in L_\delta} \left\| \vec{X} - \vec{X}^{(*)} \right\|^2 \Big/ \inf \left\| \vec{X} - \vec{X}^{(*)} \right\|^2 \right), \qquad (1)$$

$$L_\delta = \left\{ \vec{X} : f\left(\vec{X}\right) = f\left(\vec{X}^{(*)}\right) + \delta \right\}$$

Всегда COND ≥ 1, если COND велико, то поверхности уровня $f(x)$ = Const сильно вытянуты в одних направлениях; $f(x)$ слабо меняется по одним направлениям (дно оврага) и резко – по другим (склоны оврага); принято называть такие $f(x)$ овражными функциями [6–11 и др.]. В этом случае итерационный процесс замедляется и может «застрять» в неоптимальной точке. Для решения таких задач был разработан очень сложный так называемый овражный метод [12].

Минимизация квадратичных функций эквивалентна решению линейной системы $Ax = b$, и обусловленность матрицы определяется формулой [7, 13] COND(A) = $\left\|A^{-1}\right\|\left\|A\right\|$, где $\| \;\|$ – норма матрицы; A^{-1} – обратная к A матрица.

Малые погрешности матричных элементов слабо сказываются на решении $Ax = b$, если A хорошо обусловлена. Принято считать, что A плохо обусловлена, если COND(A) >> 10^2–10^3.

Как указано в [7], «для неквадратичной функции обусловленность задачи ее минимизации равна числу обусловленности ее матрицы Гессе (COND(H)) в точке минимума $\vec{X}^{(*)}$», т. е. отношению максимального к минимальному собственных значений этой матрицы. В общем случае квадратичная аппроксимация целевой функции в окрестности предполагаемого минимума не является простой процедурой, а для негладких целевых функций вообще невозможна.

Плохая обусловленность целевой функции приводит к замедлению любого итерационного процесса или к его расходимости. Для практической реализации поиска минимума можно использовать метод регуляризации [7, 14], заключающийся в «присоединении» к целевой функции стабилизатора:

$$f\left(\vec{X}^{(*)}\right) = \min(f(\vec{X}) + \beta\left\|\vec{X} - \vec{a}\right\|^2), \tag{2}$$

где $\vec{X}$, $\vec{a}$ – векторы R^n ($\vec{a}$ – опорный вектор), $\beta > 0$ – малый параметр регуляризации.

Наилучший выбор – это $\vec{a} = \vec{X}^{(*)}$, но точное решение неизвестно (исключая тестовые примеры). Автором [7] предложен прокс-стабилизатор:

$$\mathrm{Prox}\vec{X} = \mathrm{argmin}\ (f(\vec{X}) + \beta\left\|\vec{X} - \vec{a}\right\|^2), \tag{3}$$

тогда итерационный процесс принимает вид:

$$\vec{X}^{(k+1)} = \mathrm{Prox}\vec{X}^{(k)}, \tag{4}$$

где k – номер итерации.

Однако применение прокс-метода вкупе с МЛВ является дискуссионным, поскольку в теореме 5 [7] для сходимости требуется выпуклость $f(x)$. Далее, автором [7] предложена рекомендация: брать очень малые значения β нецелесообразно, из-за влияния погрешностей при вычислении $f(x)$. Возникает вопрос о точности решения, даваемого методом регуляризации. Наконец, в пар. 2 гл. 6 [7] не указана возможность применения регуляризации для задач условной оптимизации.

3. Локальные вариации на тестовых примерах

В этой серии расчетов МЛВ был опробован на нескольких известных тестовых примерах, представляющих плохо обусловленные «функционалы» $f(\vec{X}), \vec{X} \in R^N$ (N – мерное евклидово вещественное пространство) малой размерности $N = 2 \div 8$. Обозначим: $f^{(n)} = f\left(\vec{X}^{(n)}\right)$ – значение «функционала» на n-й итерации, $\vec{X}^{(0)} = \left(X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, \ldots X_N^{(0)}\right)^T$ – начальное приближение оптимальной точки; $\vec{X}^{(*)}$ – известное точное решение; $\vec{X}^{(fin)}$ – значение аргумента на последней итерации.

Скорость сходимости, а точнее, динамика спуска в пространстве конфигураций R^N зависит от выбора начального положения $\vec{X}^{(0)}$ и начального шага варьирования h_0. Как правило, $\vec{X}^{(0)}$ задавалось в соответствии с литературными рекомендациями и полагалось $h_0 = 0{,}1$, в противном случае делалась оговорка.

3.1. Минимизация без регуляризации

1. Квадратичный «функционал» $f(\vec{X}) = 1 + \frac{1}{2}\left(\vec{X}, H\vec{X}\right)$ с положительно определенной матрицей Гильберта $H_{ij} = 1/(i + j - 1), i, j = \overline{1, N}$. Последняя плохо обусловлена даже при небольших значениях N; оценка числа обусловленности проводилась с помощью подпрограммы DEKOMP [15]. Точное решение очевидно: $\vec{X}^{(*)} = \vec{0}$, $f\left(\vec{X}^{(*)}\right) = 1$. $N = 4$, тогда COND(H) $= 10^4$. Приводим значения «функционала» на итерациях (номер которых, как и ранее, обозначается буквой n) в зависимости от выбора начального приближения:

1а. $X_i^{(0)} = 1{,}0;\ i = \overline{1{,}4}.\ f^{(0)} = 3{,}54;\ f^{(1)} = 1{,}0;\ f^{(2)} = 1{,}0;\ \vec{X}^{(fin)} = (0{,}0;\ 0{,}0;\ 0{,}0;\ 0{,}0)^T$

1б. То же самое, но $X_1^{(0)} = 10{,}0;\ X_i^{(0)} = 1{,}0;\ i = 2{,}3{,}4.$

$f^{(0)} = 62{,}79;\ f^{(1)} = 1{,}034;\ f^{(2)} = 1{,}01;\ f^{(3)} = 1{,}002;\ f^{(4)} = 1{,}0008;\ f^{(5)} = 1{,}00026;$

$f^{(6)} = 1{,}00015 \ldots f^{(13)} = 1{,}0000006.$

$\vec{X}^{(fin)} = (0{,}00144; -0{,}015137; 0{,}03535; -0{,}02258)^T.$

1в. То же самое, $X_i^{(0)} = 10;\ i = \overline{1{,}4}.$

$f^{(0)} = 254{,}0;\ f^{(1)} = 1{,}0;\ \vec{X}^{(fin)} = (0{,}0;\ 0{,}0;\ 0{,}0;\ 0{,}0)^T.$

1г. То же самое,

$X_1^{(0)} = 20{,}0;\ X_i^{(0)} = 1{,}0;\ i = 2{,}3{,}4.$

$f^{(0)} = 223{,}6;\ f^{(1)} = 1{,}0359;\ f^{(2)} = 1{,}009 \ldots f^{(11)} = 1{,}0000016;\ f^{(12)} = 1{,}0000004;$

$f^{(13)} = 1{,}0000001.$

Обращает на себя внимание сходимость за один шаг, если начальная точка находится на диагонали гиперкуба. Малость $\left\| f(\vec{X}^*) - f(\vec{X}^{(fin)}) \right\|$ по сравнению с $\left\| (\vec{X}^*) - (\vec{X}^{(fin)}) \right\|$ как раз и является следствием плохой обусловленности матрицы Гильберта, т. е. неравенства COND>>1.

2. Функция Розенброка (параболический овраг) [7], $N = 2$:

$$f(\vec{X}) = (1 - X_1)^2 + 100\,(X_2 - X_1)^2 + 1{,}0;\ \mu \cong 2500$$

$\vec{X}^{(*)} = (1;1)^T,\ f(\vec{X}^{(*)}) = 1{,}0.$

2а. $\vec{X}^{(0)} = (-1{,}2;\ 1)^T.$

$f^{(0)} = 25{,}2;\ f^{(1)} \cong f^{(2)} \cong f^{(3)} \cong f^{(4)} = 5{,}0;\ f^{(5)} = 1{,}214;\ f^{(6)} = 1{,}129;$

$f^{(7)} = 1{,}0535, \ldots f^{(11)} \cong 1{,}00073 \ldots f^{(15)} = 1{,}00000 \ldots f^{(18)} = 1{,}0;$

$\vec{X}^{(fin)} = (0{,}9999533;\ 0{,}999965)^T.$

2б. То же самое, но $h_0 = 1{,}0.$

$f^{(0)} = 25{,}2;\ f^{(1)} \cong f^{(2)} \cong f^{(3)} \cong f^{(4)} = 6{,}2;\ f^{(5)} \cong f^{(6)} \cong f^{(7)} = 5{,}84 \ldots f^{(12)} \cong 1{,}013 \ldots$

$f^{(16)} = 1{,}000052 \ldots f^{(20)} = 1{,}0000001;$

$\vec{X}^{(fin)} = (0{,}9996727;\ 0{,}9993458)^T.$

2в. $\vec{X}^{(0)} = (-6;10{,}0)^T;\ h_0 = 1{,}0.$

$f^{(0)} = 67650;\ f^{(1)} \cong f^{(9)} \cong 17{,}0;\ f^{(10)} = 16{,}75;\ f^{(11)} = 1{,}0385;$

$f^{(12)} = 1{,}012 \ldots f^{(15)} = 1{,}00027 \ldots f^{(18)} = 1{,}0000038 \ldots f^{(20)} = 1{,}0000002.$

3. Функция Б.Т. Поляка (искривленный овраг, очень плохая обусловленность) [7]; $N = 4$.

$$f(\vec{X}) = \alpha^{-2} \sum_{j=1}^{10} \left[\alpha \exp(-0{,}2\,j) + 2\alpha \exp(-0{,}4\,j) - \vec{X}_1 \times \right.$$
$$\left. \times \exp(-0{,}2\,j\vec{X}_2) - \vec{X}_3 \exp(-0{,}2\,j\vec{X}_4)\right]^2.$$

3а. $\alpha = 1;\ \vec{X}^{(*)} = (1{,}0;1{,}0;\ 2{,}0;\ 2{,}0)^T;\quad f(\vec{X}^{(*)}) = 0;\ \vec{X}^{(0)} = (0{,}5;\ 0;\ 2{,}5;\ 3{,}0)^T;\ h_0 = 1{,}0.$

$f^{(0)} = 0{,}544;\ f^{(1)} = 0{,}384;\ f^{(2)} = 0{,}182;\ f^{(3)} = 0{,}0182 \ldots;\ f^{(6)} = 0{,}00225 \ldots$

$\ldots f^{(9)} = 0{,}000135 \ldots f^{(12)} = 0{,}000022 \ldots f^{(16)} = 0{,}0000204.$

Счет прекращен, поскольку $\vec{X}^{(fin)} = \vec{X}^{(16)} = (0{,}4652;\ 0{,}7426;\ 2{,}5196;\ 1{,}08029)^T.$

3б. $\alpha = 1000$; $\vec{X}^{(*)} = (1000;\ 1{,}0;\ 2000;\ 2{,}0)^T$; $f(\vec{X}^{(*)}) = 0$; $h_0 = 10{,}0$;

$\vec{X}^{(0)} = (500;\ 0{,}0;\ 2500;\ 3{,}0)^T$; $f^{(0)} = 0{,}544$; $f^{(1)} = 0{,}1997$; $f^{(2)} = 0{,}19942$;

$f^{(3)} \cong f^{(4)} \cong f^{(5)} = 0{,}1994$; $f^{(6)} = 0{,}072132$; $f^{(7)} = 0{,}03635$.

Счет прекращен, так как $\vec{X}^{(fin)} = \vec{X}^{(7)} = (610{,}16;\ 0{,}4688;\ 2784{,}5; 2{,}531)^T$.

4. Функция Вуда [16], $N = 4$.

$$f(\vec{X}) = 100\left(X_1^2 - X_2\right)^2 + (1 - X_1)^2 + 90\left(X_3^2 - X_4\right)^2 + (1 - X_3)^2 +$$
$$+ 10{,}1\left[(1 - X_2)^2 + (1 - X_4)^2\right] + 19{,}8(1 - X_2)(1 - X_4).$$

$\vec{X}^{(*)} = (1{,}0; 1{,}0;\ 1{,}0;\ 1{,}0)^T$; $f(\vec{X}^{(*)}) = 0$.

4а. $\vec{X}^{(0)} = (-3{,}0; -1{,}0; -3{,}0; -1{,}0)^T, h_0 = 10{,}0$.

$f^{(0)} = 19192$; $f^{(1)} = f^{(2)} = 2592$; $f^{(3)} = 2417$; $f^{(4)} = f^{(5)} = 2151{,}4$;

$f^{(6)} = 368{,}6$; $f^{(7)} = 24{,}22$; $f^{(8)} = 8{,}892 \ldots f^{(12)} = 7{,}889 \ldots f^{(18)} = 7{,}87693$;

$f^{(19)} = 7{,}8769295$; $f^{(20)} = 7{,}8769275$.

Счет прекращен, $\vec{X}^{(fin)} = \vec{X}^{(20)} = (-0{,}9763;\ 0{,}9633; -0{,}9611;\ 0{,}9351)^T$, так как имеет место «застревание» алгоритма в неоптимальной точке.

4б. $h_0 = 1{,}0$; $\vec{X}^{(0)}$ – то же, что и в 4а.

$f^{(0)} = 19192$; $f^{(1)} = \ldots f^{(7)} = 8{,}0$; $f^{(8)} = 7{,}908$; $f^{(9)} = 7{,}9006$;

$f^{(10)} = 7{,}87806 \ldots f^{(14)} = 7{,}876977 \ldots f^{(17)} = 7{,}8769654$;

$f^{(18)} = f^{(19)} = 7{,}8769653$.

Счет прекращен по аналогичной 4а причине:

$\vec{X}^{(fin)} = \vec{X}^{(19)} (-0{,}9698;\ 0{,}9507; -0{,}9677;\ 0{,}9477)^T$.

4в. $h_0 = 10{,}0$; $\vec{X}^{(0)} = (-30{,}0; -10{,}0; -30{,}0; -10{,}0)^T$.

$f^{(3)} = f^{(4)} = f^{(5)} = 42{,}0$; $f^{(6)} = 16{,}34$; $f^{(7)} = 5{,}761$; $f^{(8)} = 2{,}3004$; $f^{(9)} = 0{,}4929$;

$f^{(10)} = 0{,}0771 \ldots f^{(12)} = 0{,}025 \ldots f^{(16)} = 0{,}000172 \ldots f^{(19)} = 0{,}00006 \ldots f^{(22)} = 0{,}000001$;

$f^{(23)} = 0{,}0000003$.

$\vec{X}^{(fin)} = \vec{X}^{(23)} = (0{,}9999732;\ 0{,}999465; 1{,}0002637;\ 1{,}0005283)^T$.

4г. $h_0 = 1{,}0$; $\vec{X}^{(0)}$ – то же, что и в 4в.

$f^{(0)} = 157345766$; $f^{(1)} = 7510{,}1$; $f^{(2)} = 593{,}402$; $f^{(3)} = 45{,}977$;

$f^{(4)} = 29{,}5$; $f^{(5)} = 23{,}627 \ldots f^{(9)} = 3{,}9102 \ldots f^{(14)} = 0{,}0027 \ldots f^{(18)} = 0{,}0020065$;

$f^{(19)} = 0{,}0020046$; $f^{(20)} = 0{,}002004$.

$\vec{X}^{(fin)} = \vec{X}^{(29)} = (0{,}999752;\ 0{,}9995041;\ 1{,}000248;\ 1{,}000496)^T$.

На лицо парадоксальный результат: удаление начальной точки от оптимальной способствовало преодолению «застревания».

5. Спиралевидный желоб [16], $N = 3$.

$f(\vec{X}) = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2$;

$f_1(\vec{X}) = 10\left[X_3 - 10\,\theta(X_1, X_2)\right]$, $f_2(\vec{X}) = 10\left(\sqrt{X_1^2 + X_2^2} - 1\right)$, $f_3(\vec{X}) = X_3$,

$$\theta(X_1, X_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{X_2}{X_1}, & X_1 > 0 \\ \dfrac{1}{2\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{X_2}{X_1} + \dfrac{1}{2}, & X_1 < 0, \end{cases}$$

$\vec{X}^{(*)} = (1{,}0;\ 0{,}0;\ 0{,}0)^T$, $f(\vec{X}^{(*)}) = 0$.

5а. $h_0 = 1{,}0$; $\vec{X}^{(0)} = \left(-1{,}0; 0{,}0; 0{,}0\right)^T$.
$f^{(0)} = 2500$; $f^{(1)} = 24{,}407$; $f^{(2)} = 7{,}3037$; $f^{(3)} = 1{,}557\ldots f^{(6)} = 0{,}2785\ldots f^{(10)} = 0{,}04726\ldots$
$f^{(14)} = 0{,}000205\ldots f^{(19)} = 0{,}0000002$; $f^{(20)} = 0{,}0000001$.
$\vec{X}^{(fin)} = \vec{X}^{(20)} = (1{,}0; 0{,}0001411; 0{,}0002232)^T$.
5б. $\vec{X}^{(0)} = (-10{,}0; 0{,}0; 0{,}0)^T$; h_0 – то же, что и в п. 5а.
$f^{(0)} = 10600$; $f^{(1)} = 26{,}0\ldots f^{(4)} = 25{,}0$; $f^{(5)} = 23{,}83$; $f^{(6)} = 11{,}43$; $f^{(7)} = 2{,}1187$;
$f^{(8)} = 0{,}476$; $f^{(9)} = 0{,}1358\ldots f^{(14)} = 0{,}000205\ldots f^{(19)} = 0{,}0000002$; $f^{(20)} = 0{,}0000001$.
$\vec{X}^{(fin)} = \vec{X}^{(20)} = (1{,}0; 0{,}0001411; 0{,}0002232)^T$.

Итак, работоспособность МЛВ на примерах 3 и 4 (п. 3.1) нельзя признать удовлетворительной. Разумеется, проведенное тестирование на известных примерах нельзя считать исчерпывающим. Заслуживает особого внимания сходимость к искомому минимуму или отсутствие таковой в зависимости от выбора начального приближения. В целом результаты тестирования можно оценить не более, чем удовлетворительными.

3.2. Минимизация с регуляризацией

Здесь нумерация примеров будет сопровождаться припиской буквы р (регуляризация).

1р. Функция Б.Т. Поляка, см. пример 3 (п. 3.1).

1ар. Входные данные – пример 3б, стабилизатор – по формуле (2) с $\vec{a} = 0$.
$\beta = 10^{-6}$: $f^{(0)} = 7{,}044$; $f^{(1)} = f^{(2)} = f^{(3)} = 3{,}495$; $f^{(4)} = 2{,}968$; $f^{(5)} = f^{(6)} = f^{(7)} = 2{,}259$;
$f^{(8)} = 2{,}224\ldots f^{(14)} = 2{,}2217994\ldots f^{(17)} = f^{(18)} = f^{(19)} = f^{(20)} = 2{,}2217981$.
Зацикливание в неоптимальной точке.
$\vec{X}^{(fin)} = (823{,}744; 0{,}84335; 823{,}741; 0{,}84334)^T$.
$\beta = 10^{-7}$: $f^{(0)} = 1{,}194$; $f^{(1)} = f^{(2)} = f^{(3)} = f^{(4)} = 1{,}1786$ – счет прекращен;
$\vec{X}^{(fin)} = (460{,}0; 0{,}0; 2677{,}5; 3{,}0)$T.
$\beta = 0{,}5 \cdot 10^{-6}$: $f^{(0)} = 3{,}794$; $f^{(1)} = 2{,}733$; $f^{(2)} = f^{(3)} = 2{,}7327$; $f^{(4)} = 1{,}7525$;
$f^{(5)} = 1{,}6168$; $f^{(6)} = f^{(7)} = 1{,}422\ldots f^{(12)} = 1{,}40046$; $f^{(13)} = \ldots = f^{(20)} = 1{,}40045$.

Застревание в неоптимальной точке.
$\vec{X}^{(fin)} = (1003{,}37; 1{,}0376; 1003{,}37; 1{,}0376)^T$ – близки к правильным только первые две компоненты. В диапазоне $\beta = 10^{-2} \div 10^{-5}$ и при $n_{\max} = 20$ счет шел быстро, но также заканчивался в точках, далеких от точного минимума $X^{(*)}$. Таким образом, стабилизатор простейшего вида (формула (2) с $\vec{a} = 0$) в данном примере оказался неэффективным.

1бр. Исходные данные те же, что и выше (пример 1ар), но стабилизатор иной – по формуле (2) с $\vec{a} = \vec{X}^{(*)}$.
$\beta = 10^{-3}$: $f^{(0)} = 500{,}6$; $f^{(1)} = 2{,}978$; $f^{(2)} = 2{,}958$; $f^{(3)} = 1{,}788$;
$f^{(4)} = \ldots = f^{(8)} = 0{,}005527\ldots f^{(11)} = 0{,}0000463\ldots f^{(15)} = 0{,}0000002$;
$f^{(16)} = \ldots f^{(20)} = 0{,}0$.
$\vec{X}^{(fin)} = (1000{,}0; 1{,}000023; 2000{,}0; 1{,}999977)^T$.
Для $\beta = 10^{-4}$ за 20 итераций было получено:
$\vec{X}^{(fin)} = (1000{,}00002; 1{,}000023; 1999{,}99998; 1{,}999977)^T$.
$f^{(fin)} = 0{,}0$.

Следовательно, стабилизатор (формула (2) с $\vec{a} = \vec{X}^{(*)}$), использующий точное решение, в данном примере оказался весьма эффективным.

1вр. Данные идентичны примеру 1ар, стабилизатор – по формулам (3) и (4).
$\beta = 1{,}05 \cdot 10^{-2}$: $f^{(0)} = 0{,}544\ldots f^{(20)} = 0{,}02176$;
$\vec{X}^{(fin)} = (499{,}999; 0{,}7498; 2499{,}999; 1{,}833)^T$ – конечное состояние близко к исходному $\vec{X}^{(0)}$.
$\beta = 1{,}05 \cdot 10^{-3}$: $f^{(0)} = 0{,}544\ldots f^{(20)} = 0{,}0347$;

ISSN 2686-8075
2021 № 2 (8)
Актуальные вопросы пожарной безопасности
Current Fire Safety Issues

$\vec{X}^{(fin)} = (499{,}826;\ 0{,}7505;\ 2499{,}826;\ 1{,}833)^T$.

$\beta = 1{,}05 \cdot 10^{-1}$: $f^{(0)} = 0{,}544 \ldots f^{(20)} = 0{,}216$;

$\vec{X}^{(fin)} = (499{,}999;\ 0{,}75;\ 2499{,}999;\ 1{,}833)^T$.

Во всех этих трех вариантах «функционал» f на последних пяти итерациях не изменялся. Его регуляризация с помощью «укороченного» прокс-стабилизатора оказалась неудачной.

1гр. Исходные данные – пример 3а, стабилизатор – по формуле (2) с $\vec{a} = \vec{X}^{(*)}$.

$\beta = 10^{-3}$: $f^{(0)} = 0{,}5465$; $f^{(1)} = 0{,}3888$; $f^{(2)} = 0{,}1862$; $f^{(3)} = 0{,}0193 \ldots$

$\ldots f^{(6)} = 0{,}002975 \ldots f^{(10)} = 0{,}000631$; $f^{(11)} = 0{,}000617$.

Счет прекращен, $\vec{X}^{(fin)} = (499{,}32;\ 0{,}7539;\ 2{,}496,\ 1{,}8193)^T$.

$\beta = 10^{-2}$: $f^{(0)} = 0{,}569$; $f^{(1)} = 0{,}429$; $f^{(2)} = 0{,}2199$; $f^{(3)} = 0{,}0294$;

$f^{(4)} = 0{,}0232 \ldots f^{(8)} = 0{,}005191 \ldots f^{(12)} = 0{,}0000086 \ldots f^{(15)} = 0{,}0000002$; $f^{(16)} = \ldots = f^{(20)} = 0{,}0$.

$\vec{X}^{(fin)} = (0{,}9999352;\ 0{,}99999;\ 2{,}0000534;\ 1{,}99995)^T$.

Для функции Б.Т. Поляка наиболее эффективным стабилизатором является вышеприведенный, использующий точное решение.

2р. Функция E.M.L. Beal [17], $N = 2$.

$$f(\vec{X}) = \left[C_1 - X_1(1 - X_2)\right]^2 + \left[C_2 - X_1(1 - X_2^2)\right]^2 + \left[C_3 - X_1(1 - X_2^3)\right]^2;$$

$C_1 = 1{,}5$; $C_2 = 2{,}25$; $C_3 = 2{,}625$; $\vec{X}^{(*)} = (3{,}0;\ 0{,}5)^T$, $f(\vec{X}^{(0)}) = 0{,}0$.

$h_0 = 1{,}0$; $\vec{X}^{(0)} = (5{,}0;\ 10{,}0)^T$; стабилизатор – формула (2) с $\vec{a} = \vec{X}^{(*)}$.

Без регуляризации, $\beta = 0{,}0$: $f^{(0)} = 25225675{,}453$; $f^{(1)} = \ldots = f^{(6)} = 14{,}203$;

$f^{(7)} = 5{,}1886$; $f^{(8)} = f^{(9)} = f^{(10)} = 5{,}1885$; $f^{(11)} = 0{,}60568$; $f^{(12)} = 0{,}559$.

Счет прекращен, $\vec{X}^{(fin)} = (-13{,}8984;\ 1{,}06738)^T$.

$\beta = 10^{-3}$: $f^{(0)} = 25225675{,}453$; $f^{(1)} = f^{(2)} = 0{,}7044$; $f^{(3)} = 0{,}1767$;

$f^{(4)} = 0{,}1626$; $f^{(5)} = 0{,}0392 \ldots f^{(9)} = 0{,}000596 \ldots f^{(12)} = 0{,}0000236 \ldots$

$\ldots f^{(16)} = \ldots = f^{(20)} = 0{,}0000185$.

$\vec{X}^{(fin)} = (2{,}999979;\ 0{,}4999943)^T$.

Этот пример показателен своей малой размерностью.

3р. Квадратичный «функционал» с матрицей Гильберта, см. пример 1 (п. 3.1).

3ар. Выбираем прокс-стабилизатор (формулы (3) и (4)) и начальные данные примера 1б ($N = 4$).

$\beta = 10^{-3}$: $f^{(0)} = 62{,}79$; $f^{(1)} = 1{,}277$; $f^{(2)} = 1{,}1106$; $f^{(3)} = 1{,}1031$;

$f^{(4)} = 1{,}10097$; $f^{(5)} = 1{,}10037$; $f^{(6)} = 1{,}10018 \ldots f^{(12)} = 1{,}100118$;

$f^{(13)} = 1{,}100116$.

$\vec{X}^{(fin)} = (0{,}0244;\ -0{,}27385;\ 0{,}6578;\ -0{,}4271)^T$.

Опять парадоксальный результат: сравнение с примером 1б показывает, что регуляризация идет во вред; конечная (после 13 итераций) точка (по всем координатам) значительно дальше от оптимальной $\vec{X}^{(*)} = 0$, чем таковая в примере 1б ($\beta = 0$). Кроме того, видно, что регуляризация приводит к «застреванию» алгоритма.

3бр. $N = 6$; $\vec{X}^{(0)} = (0{,}1;\ 0{,}9;\ 1{,}0;\ 1{,}0;\ -2{,}0;\ -0{,}25)^T$; стабилизатор по формулам (3) и (4).

Без регуляризации ($\beta = 0$): $f^{(0)} = 1{,}2904$; $f^{(1)} = 1{,}014$; $f^{(2)} = 1{,}0034$; $f^{(3)} = 1{,}00126$;

$f^{(4)} = 1{,}00452 \ldots f^{(8)} = 1{,}0000166 \ldots f^{(12)} = 0{,}0000006 \ldots f^{(15)} = 1{,}0000002$;

$f^{(16)} = f^{(17)} = 1{,}0000001$.

$\vec{X}^{(fin)} = (-0{,}00074;\ 0{,}003423;\ -0{,}28523;\ 0{,}83727;\ -1{,}000803;\ 0{,}417389)^T$.

На лицо фантастический результат: на 17-й итерации значение функционала совпадает с минимальным с точностью 10^{-7}, а только две первые компонента аргумента близки к соответствующим нулевым значениям. Все объясняется катастрофическим ухудшением обусловленности матрицы Гильберта с ростом ее размерности; для $N = 6$ COND $\cong 0{,}2 \cdot 10^7$.

Варьирование параметра регуляризации в широких пределах $10^{-6} \leq \beta \leq 10^{-2}$ с тем же количеством итераций ($n_{max} = 17$) дало следующие результаты:

$\beta = 10^{-6}$: $f^{(fin)} = 1{,}000016$;

$\vec{X}^{(fin)} = (-0{,}000665; 0{,}03296; -0{,}2809; 0{,}8335; -1{,}003; 0{,}42017)^T$.

$\beta = 10^{-5}$: $f^{(fin)} = 1{,}0000146$;

$\vec{X}^{(fin)} = (-0{,}00021; 0{,}025885; -0{,}2594; 0{,}826915; -1{,}03673; 0{,}4461)^T$.

$\beta = 10^{-4}$: $f^{(fin)} = 1{,}0001397$;

$\vec{X}^{(fin)} = (0{,}001016; 0{,}006651; -0{,}19965; 0{,}801247; -1{,}11538; 0{,}50983)^T$.

$\beta = 10^{-3}$: $f^{(fin)} = 1{,}0012637$;

$\vec{X}^{(fin)} = (0{,}00445; -0{,}01461; -0{,}2071; 0{,}8836; -1{,}1342; 0{,}46702)^T$.

$\beta = 10^{-2}$: $f^{(fin)} = 1{,}0082034$;

$\vec{X}^{(fin)} = (0{,}03618; -0{,}29437; 0{,}20939; 1{,}03766; -1{,}4734; 0{,}459)^T$.

4. Заключительные замечания

Таким образом, использование укороченного прокс-стабилизатора в широком диапазоне изменения β ничего не дало (на этом примере). Подводя итоги регуляризации МЛВ на этих примерах, можно отметить следующее.

Во-первых, регуляризация, способствует сходимости МЛВ. Во-вторых, наиболее эффективным, по-видимому, является стабилизатор (формула (2) с $\vec{a} = \vec{X}^{(*)}$), использующий точное решение. Однако при решении конкретных задач последнее, естественно, неизвестно, поэтому это ничего не дает. В-третьих, несмотря на некоторое преобладание отрицательных тестовых результатов по использованию регуляризации, категорический вывод о непригодности МЛВ для каких-то прикладных задач (краевых, например) делать преждевременно по следующим причинам:

- тестовые примеры, как очень плохо обусловленные, специально подобраны для выявления поведения алгоритма в окрестности известного минимума, обусловленность рассматриваемой задачи может оказаться не такой уж плохой;
- в случае необходимости вовсе необязательно ограничиваться вышеприведенными стабилизаторами, можно попытаться для оптимизации сформулированной задачи сконструировать какой-то новый тип.

Список литературы

1. *Банди Б.* Методы оптимизации. Вводный курс. М.: Радио и связь, 1988. 128 с.
2. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975. 536 с.
3. *Базара М.* и др. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1982. 583 с.
4. *Полак Э.* Численные методы оптимизации. Единый подход. М.: Мир, 1974. 376 с.
5. *Черноусько Ф.Л.* и др. Вариационные задачи механики и управления (Численные методы). М.: Наука, 1973. 238 с.
6. *Амосов А.А.* и др. Вычислительные методы для инженеров: учеб. пособие. М.: Высш. шк., 1994. 544 с.
7. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. 384 с.
8. *Петров И.В.* и др. Лекции по вычислительной математике: учеб. пособие. М.: Инернет-Университет Информационных Технологий; БИ-НОМ. Лаборатория знаний, 2010. 523 с.
9. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988. 552 с.

10. *Бахвалов Н.С.* и др. Численные методы: учеб. пособие. М.: Наука, 1987. 600 с.
11. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
12. *Ларичев О.И.* и др. Методы поиска экстремума овражных функций. М.: Наука, 1989. 95 с.
13. *Аоки М.* Введение в методы оптимизации. М.: Наука, 1977. 344 с.
14. *Тихонов А.Н.* и др. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.
15. *Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980. 280 с.
16. *Дэннис Дж., Шнабель Р.* Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. М.: Мир, 1988. 440 с.
17. *Brent R.P.* Algoritms minimization without derivatives. N.Y.: Prentice Hall, 1973. 195 с.

Материал поступил в редакцию 21.04.2021 г.

Шамонин Валерий Геннадьевич – ведущий научный сотрудник, кандидат физико-математических наук. Тел. (495) 524-81-74. E-mail: k708@yandex.ru; ***Зуев Станислав Анатольевич*** – ведущий научный сотрудник, кандидат технических наук. Тел. (495) 524-81-74. E-mail: k708@yandex.ru; ***Леончук Петр Алексеевич*** – начальник сектора. Тел. (495) 524-82-09. E-mail: peter-1@yandex.ru; ***Хатунцева Светлана Юрьевна*** – старший научный сотрудник. Тел. (495) 524-81-74. E-mail: lu2986@yandex.ru; ***Барановская Елена Николаевна*** – научный сотрудник. Тел. (495) 524-82-53. E-mail: komnata110@yandex.ru (Всероссийский ордена “Знак Почета” научно-исследовательский институт противопожарной обороны Министерства Российской Федерации по делам гражданской обороны, чрезвычайным ситуациям и ликвидации последствий стихийных бедствий (ФГБУ ВНИИПО МЧС России)), г. Балашиха, Московская область, Россия.

V.G. Shamonin, S.A. Zuev, P.A. Leonchuk, S.Yu. Khatuntseva, E.N. Baranovskaya

APPLICATION OF THE LOCAL VARIATION METHOD FOR SOLVING FIRE SAFETY PROBLEMS OF OBJECTS OF PROTECTION

Application of the local variations method for solving applied problems, including fire protection ones, can be associated with overcoming possible difficulties (both of an analytical nature and of a numerical implementation). For the following use of this method it was tested on the so-called "hard" examples taken from the literature. Although the test results should be considered like satisfactory, the applicability of the method for solving specific applied problems can be considered as optimistic.

Keywords: *local variation method, constrained minimization and unconstrained optimization, condition number, regularization*

Valery G. Shamonin – Leading Researcher, Candidate of Physical and Mathematical Sciences. Phone (495) 524-81-74. E-mail: k708@yandex.ru; ***Stanislav A. Zuev*** – Leading Researcher, Candidate of Technical Sciences. Phone (495) 524-81-74. E-mail: k708@yandex.ru; ***Petr A. Leonchuk*** – Chief of Sector. Phone (495) 524-82-09. E-mail: peter-1@yandex.ru; ***Svetlana Yu. Khatuntseva*** – Senior Researcher. Phone (495) 524-81-74. E-mail: lu2986@yandex.ru; ***Elena N. Baranovskaya*** – Researcher. Phone (495) 524-82-53. E-mail: komnata110@yandex.ru.

All-Russian Research Institute for Fire Protection (VNIIPO), the Ministry of the Russian Federation for Civil Defence, Emergencies and Elimination of Consequences of Natural Disasters (EMERCOM of Russia), Balashikha, Moscow region, Russia.