

УДК 614.838.44:536.3

doi: 10.37657/vniipo.avpb.2022.20.91.001

## О ПРОЕКТИРОВАНИИ ЭВАКУАЦИОННЫХ ВЫХОДОВ В ЗДАНИЯХ КОРИДОРНОГО ТИПА

*Елена Николаевна Барановская, Петр Алексеевич Леончук, Станислав Анатольевич Зуев, Валерий Геннадьевич Шамонин*

Всероссийский ордена “Знак Почета” научно-исследовательский институт противопожарной обороны Министерства Российской Федерации по делам гражданской обороны, чрезвычайным ситуациям и ликвидации последствий стихийных бедствий (ФГБУ ВНИИПО МЧС России), г. Балашиха, Московская область, Россия.

**Аннотация.** Применение метода локальных вариаций для решения прикладных задач, в том числе пожарной охраны, может быть сопряжено с преодолением возможных трудностей (как аналитического характера, так и численной реализации).

При проектировании зданий коридорного типа возникает вопрос об оптимальном размещении эвакуационных выходов (ЭВ) вдоль одной или обеих сторон длинного коридора. В статье рассматривается равномерное распределение выходов, как для широких, так и для узких коридоров и представлен соответствующий критерий. Расчеты приведены для одномерной математической задачи, когда ЭВ размещены только на одной стороне коридора, и для двухмерной – при размещении ЭВ на обеих сторонах и учете влияния противоположащих ЭВ. Для расчетов сформулирована неклассическая задача  $\max(\min)$  («максимина»). Поскольку в литературе не было найдено алгоритмов ее решения, был предложен численный вариант ее решения с помощью метода локальных вариаций.

В работе рассмотрены вопросы об оптимальном расположении ЭВ на продольных сторонах коридора с заданной длиной и шириной. Тестовые варианты для малого числа ЭВ (с известным решением) подтвердили правильность выбранного алгоритма и расчета с помощью созданной программы на языке TurboПаскаль-7. Для последующего использования этого метода необходимо его дальнейшее тестирование для коридоров различной конфигурации и большего числа эвакуационных выходов, выходящих в указанный коридор. Результаты предварительного тестирования в целом показали возможность применения выбранного подхода при решении конкретных прикладных задач.

**Ключевые слова:** эвакуационный выход, ширина эвакуационных выходов, координаты центров эвакуационных выходов, число эвакуационных выходов, метод локальных вариаций

**Для цитирования:** Барановская Е.Н., Леончук П.А., Зуев С.А., Шамонин В.Г. О проектировании эвакуационных выходов в зданиях коридорного типа // Актуальные вопросы пожарной безопасности. 2022. № 3 (13). С. 6–16. <https://doi.org/10.37657/vniipo.avpb.2022.20.91.001>.

## ON THE DESIGN OF EMERGENCY EXITS IN CENTRAL-CORRIDOR RESIDENTIAL BUILDINGS

*Baranovskaya Elena Nikolaevna, Leonchuk Peter Alekseevich, Zuev Stanislav Anatolievich Shamonin Valeriy Gennadievich*

All-Russian Research Institute for Fire Protection (VNIIPPO), the Ministry of the Russian Federation for Civil Defence, Emergencies and Elimination of Consequences of Natural Disasters (EMERCOM of Russia), Balashikha, Moscow region, Russia.

**Abstract.** The application of the method of local variations for solving applied

problems including fire protection problems may involve possible difficulties (both analytical nature and numerical implementation).

The issue concerning optimal placement of emergency exits along one or both sides of a long corridor arises when designing central-corridor residential buildings. The article considers the uniform distribution of outputs for both wide and narrow corridors and also presents the corresponding criterion. Calculations are given for a one-dimensional mathematical problem when emergency exits are placed only on the one side of the corridor, and for a two-dimensional one when emergency exits are placed on both sides and the influence of opposing emergency exits is taken into account. The non classical max (min) problem is formulated for calculations., The numerical version of its solution was proposed using the method of local variations since there were not found an algorithms for its solution in the literature.

The paper considers the optimal arrangement of emergency exits on the longitudinal sides of the corridor with given length and width. Test variants for a small number of emergency exits (with a known solution) confirmed the correctness of the chosen algorithm as well as calculation using the created program on the TurboPascal-7 language. For the subsequent use of this method it is necessary to further test it for corridors of various configurations and a larger number of evacuation exits that exit into the specified corridor. The results of preliminary testing generally showed the possibility of applying the chosen approach to solving specific applied tasks.

**Keywords:** emergency exit, width of emergency exits, coordinates of centers of emergency exits, number of emergency exits, method of local variations

**For citation:** Baranovskaya E.N., Leonchuk P.A., Zuev S.A., Shamonin V.G. On the design of emergency exits in central-corridor residential buildings. Aktual'nye Voprosy Pozharnoi Bezopasnosti – Current Fire Safety Issues, 2022, no. 3, pp. 6-16. (In Russ.). <https://doi.org/10.37657/vniipo.avpb.2022.20.91.001>.

### Введение

Рассматривается вопрос о расположении эвакуационных выходов (ЭВ) по обеим сторонам коридора, в торцах которого имеется хотя бы один ЭВ, ведущий на лестничную клетку или в безопасную зону.

Что касается нормативных требований в отечественной литературе по этому вопросу, то следует упомянуть два источника. Во-первых, в ч. 8, 10, 11 и 12 ст. 89 «Требования пожарной безопасности к эвакуационным путям, эвакуационным и аварийным выходам» Федерального закона от 22.07.2008 № 123-ФЗ (ред. от 30.04.2021) «Технический регламент о требованиях пожарной безопасности» содержатся требования лишь качественного характера. Во-вторых, в п. 4.2.16 (2-й абзац) СП 1.13130.2021 «Системы противопожарной защиты. Эвакуационные пути и выходы» указано, что минимальное расстояние  $M$  между наиболее удаленными один от другого эвакуационными выходами (ЭВ) следует определять по формуле

$$M \geq 0,4L. \quad (1)$$

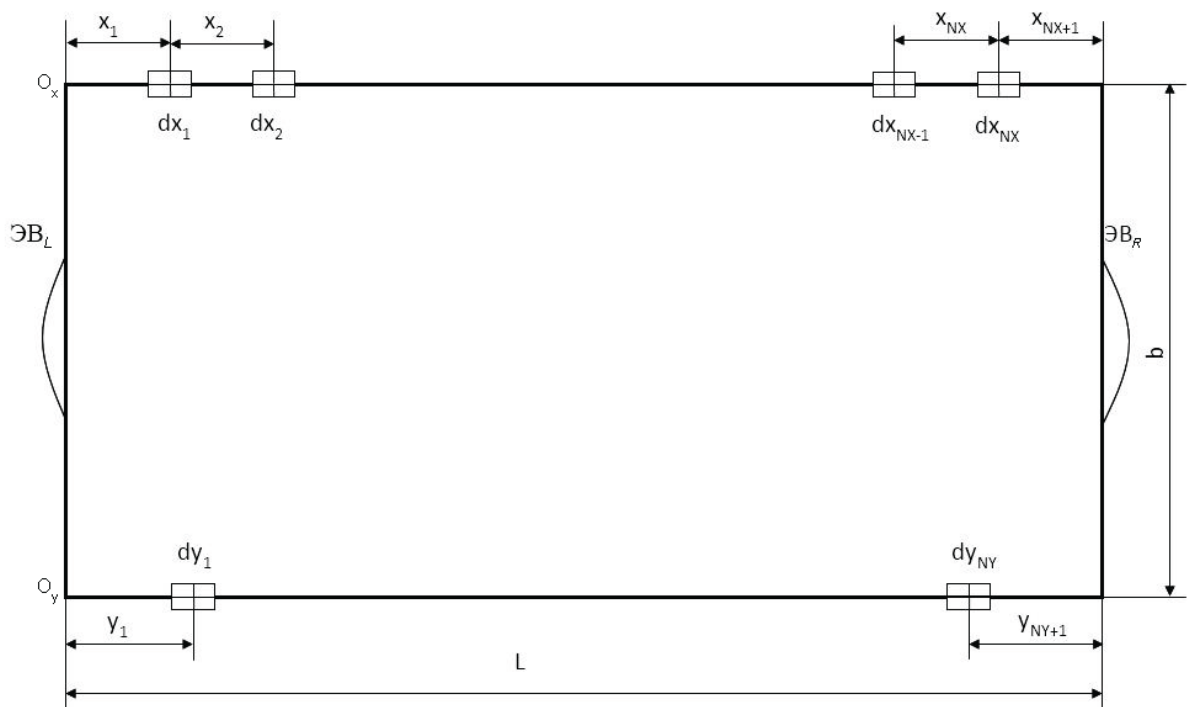
Данное требование (минимаксное) не учитывает геометрические характеристики (ширину коридора  $b$ , ширины ЭВ на обеих его сторонах), а также их количество  $N_x, N_y$ . Поэтому, целью статьи является уточнение формулы (1). Считаем, что вышеуказанные величины заданы, а целью работы является нахождение оптимального расположения ЭВ.

При отсутствии конкретных проектных решений по расположению ЭВ, обусловленных конфигурацией этажа, предлагается решение по максимальной удаленности ЭВ друг от друга, минимизирующее смешение людских потоков (и, соответственно, панику) при эвакуации в случае пожара или других чрезвычайных ситуациях.

Сформулирована неклассическая задача max (min) (максимина [1]); ввиду того, что нами не найдено алгоритмов ее решения (и хотя бы аналитических рассмотрений, теорем и пр.) в доступных публикациях, был предложен численный вариант ее решения с помощью метода локальных вариаций (МЛВ). Тестовые варианты для малого числа ЭВ (с известным решением) подтвердили правильность выбора алгоритма и созданной программы расчета на языке ТурбоПаскаль-7.

**Постановка задачи**

Рассматривается вопрос об оптимальном расположении ЭВ на «верхнем» (в плане, рис. 1) и «нижнем» сторонах длинного коридора длиной  $L$  и шириной  $b$ . В проектном решении заданы величины  $L, b, N_x, N_y$  (числа ЭВ на верхней и нижней сторонах коридора соответственно), а также их ширины  $dx_1, dx_2, dx_{N_x}, dy_1, dy_{N_y}$  (хотя, чаще всего, они одинаковы). Из двух главных выходов (на лестничную клетку или в безопасную зону) предусмотрен хотя бы один, пусть это будет ЭВ<sub>L</sub>, второй ЭВ<sub>R</sub> может отсутствовать или быть аварийным на наружную лестницу.



**Рис. 1. План коридора ( $N_x + N_y$  ЭВ), размерные величины**

Нижние ЭВ могут отсутствовать вообще по проекту (глухая стена). Также в проектном решении может быть предусмотрено расположение ЭВ, исходя из конфигурации этажа (наличие проходов между стеллажами в хранилище или в торговом зале). В противном (рассматриваемом нами случае) возникает вопрос о размещении ЭВ исходя из соображений здравого смысла.

А именно, как отмечено во введении, целесообразно максимально удалить ЭВ друг от друга. Введем обозначения (рис. 1):

- $x_1$  – расстояние от центра 1-го ЭВ до левого торца коридора;
- $x_{N_x+1}$  – расстояние от центра  $N_x$ -го ЭВ до правого торца коридора;
- $x_i$  – расстояние между центрами  $i-1$  и  $i$  ЭВ.

И аналогично для ЭВ нижней стороны с заменой  $x \rightarrow y$ .

Координаты центров ЭВ верхней стороны коридора (начало – в левом углу, точка  $O$ , рис. 1):

$$Rx_1 = x_1, Rx_{N_x} = L - x_{N_x+1}, Rx_i = Rx_{i-1} + x_i; i = \overline{2, N_x}. \tag{2}$$

А также для ЭВ нижней стороны с заменой  $x \rightarrow y$ .

Отметим, что рассматриваемая проблема является частью общей, а имен-

но, проектированием конфигурации этажа: найти оптимальные значения  $L, b, Nx, Ny, dx_j, x_j, dy_j, y_j, i = \overline{1, Nx}; j = \overline{1, Ny}$ .

Имеем две задачи:

I («одномерная»). Размещение ЭВ на верхней стороне коридора, на нижней – либо их нет вообще (глухая стена), либо они есть, но отсутствует «влияние» верхних и нижних ЭВ друг на друга, т. е. коридор «широкий» ( $b \geq b_*$ ).

II («двумерная»). Коридор – «узкий» ( $b < b_*$ ), при оптимальном размещении ЭВ на обеих сторонах следует учитывать указанное «влияние», т. е. расстояния между ними (рис. 2–4).

Задача I имеет элементарное решение, для решения II будет привлечен численный метод.

## Математическая модель обеих задач

Задача I.

Найти  $Mx = Mx(x_{opt}) = \max \Phi(x_1, x_{Nx+1}, \min(x_2, x_3, \dots, x_{Nx}))$  при ограничениях

$$x_1 \geq dx_1/2, x_2 \geq (dx_1 + dx_2)/2, \dots, x_{Nx} \geq (dx_{Nx-1} + dx_{Nx})/2, x_{Nx+1} \geq dx_{Nx}/2,$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{Nx+1} = L.$$

(3)

Здесь и далее жирным шрифтом обозначаются векторы и матрицы (их компоненты – обычным).

Данная запись означает, что при фиксированных  $x_1, x_{Nx+1}$  находится значение минимальной компоненты вектора  $x$  (из числа  $x_2, x_3, \dots, x_{Nx}$ ) и, далее – максимум функции  $\Phi$ .

Для приведения (2) и (3) к удобному безразмерному виду отнесем все размерные величины к длине коридора, (обозначив безразмерные величины черточкой сверху):

$$\bar{b} = b/L; \bar{x}_i = x_i/L, i = \overline{1, Nx}.$$

Обозначив  $dx_{max} = \max(dx_i)$ ,  $\bar{d}x_i = dx_i/dx_{max}; i = \overline{1, Nx}, kx = 0,5 * dx_{max}/L$ , получим задачу (3) в безразмерных переменных.

Найти  $Mx = Mx(x_{opt}) = \max(\bar{x}_1, \bar{x}_{Nx+1}, \min(\bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_{Nx}))$  при ограничениях

$$\bar{x}_1 \geq kx * \bar{d}x_1, \bar{x}_2 \geq kx * (\bar{d}x_1 + \bar{d}x_2), \dots, \bar{x}_{Nx} \geq kx * (\bar{d}x_{Nx-1} + \bar{d}x_{Nx}), \bar{x}_{Nx+1} \geq kx * \bar{d}x_{Nx},$$

(4)

$$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_{Nx+1} = 1.$$

Здесь, очевидно,  $\min(\bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_{Nx})$  есть функция  $\bar{x}_1$  и  $\bar{x}_{Nx+1}$ , а решение  $Mx$  – максимум этой функции; решением задачи (4) считаем не только числовое значение  $Mx$ , но и значения всех компонентов вектора  $x_{opt}$ .

Для ЭВ на нижней стороне формулировка задачи максимина (4) аналогична с заменой  $x \rightarrow y$ . В дальнейшем черточки и волны над безразмерными величинами опущены для простоты. Это также касается координат центров ЭВ сторон коридора (2),  $\bar{R}x_i = Rx_i/L, \bar{R}y_j = Ry_j/L, i = \overline{1, Nx}; j = \overline{1, Ny}$ .

Число публикаций по методам решения экстремальных задач (оптимизации, как безусловной, так и с ограничениями) очень велико, приведем лишь самые важные, на наш взгляд [1–21, 24].

Однако задача (4) является задачей максимина с ограничениями, она и подобная – минимакса; число публикаций по ним уже ограничено, отметим некоторые из них (доступные) [1, 2, 4, 5]. В работе [2] дана такая формулировка: найти  $Sup \text{ in } f F(x, y)$ , где векторы  $x$  и  $y$  принадлежат любым областям  $P$  и  $Q$  соответственно; ограничения имеют вид:  $g_i(x) \geq 0, i = \overline{1, Nx}; h_j(y) \geq 0, j = \overline{1, Ny}$ .

Запись  $Sup \text{ in } f$  означает, что в начале находится точная нижняя грань  $F$  по всем  $y$  из области  $Q$  при фиксированном  $x$  (из области  $P$ ), а затем – точная верхняя грань  $F$  по всем  $x$ .

Таким образом, задача I удовлетворяет формулировке  $\max \min$ , данной в работе [2].

Но простое нахождение минимальной компоненты вектора  $\vec{x} \min(x_2, x_3 \dots x_{Nx})$  не подходит под вышеприведенную классическую формулировку максимина, мы имеем, возможно, дело с недифференцируемой оптимизацией [10]. Поэтому мы вынуждены ограничиться методами прямого поиска.

В публикациях [20, 21] представлены следующие из указанных методов: Хука и Дживса, Нелдера и Мида (поиск по деформированному многограннику), методы Розенброка и Пауэлла, метод случайного поиска. Однако эти методы предназначены для решения задач безусловной оптимизации, а учет наличия ограничений ограничен лишь методом скользящего допуска. В доступных (вышеприведенных) публикациях по максимину и минимаксу фигурируют теоремы сходимости итераций, включающие градиенты, а эффективных алгоритмов численной реализации нами не обнаружено. В конечном счете для решения обеих задач I и II нами выбран (МЛВ) [21].

Задача I имеет простое решение (если рассмотреть сначала случаи  $Nx = 2, 3$ ): во-первых, крайние ЭВ вплотную «прижаты» к торцам коридора, т. е.  $x_1 = kx * dx_1$ ,  $x_{Nx+1} = kx * dx_{Nx}$  и во-вторых, все расстояния между ЭВ одинаковые:  $x_2 = \dots = x_{Nx} = Mx$ . Тогда из последнего равенства (4) следует:

$$Mx = [1 - kx * (dx_1 + dx_{Nx})] / (Nx - 1), i = \overline{2, Nx - 1}. \quad (5)$$

Аналогичное соотношение имеет место для нижнего ряда ЭВ с заменой  $x \rightarrow y$ :

$$My = [1 - ky * (dy_1 + dy_{Ny})] / (Ny - 1), j = \overline{2, Ny - 1}, \quad (6)$$

где  $ky = 0,5 * dy_{\max} / L$ .

Это решение допускает простую электростатическую аналогию. Вместо ЭВ имеем систему одноименных равных электрических зарядов, закрепленных на тележках, скользящих без трения по сторонам коридора. Тогда равномерное распределение ЭВ соответствует равновесной конфигурации этой системы зарядов.

Вышеупомянутая критическая ширина коридора, очевидно, определяется соотношением:  $b_* = \max(Mx, My)$ .

Численное решение (МЛВ) задачи I целесообразно проводить в отладочных целях для различных начальных приближений.

Задача II.

Обозначим расстояние между  $i$ -м верхним и  $j$ -м нижним ЭВ  $Rxy_{ij}$ ,  $i = \overline{1, Nx}$ ;  $j = \overline{1, Ny}$ :

$$Rxy_{ij} = [(Rx_i - Ry_j)^2 + b^2]^{1/2}. \quad (7)$$

Формулировка задачи II:

Найти  $MxyR = \max(x_1, x_{Nx+1}, y_1, y_{Ny+1}, \min(x_2, x_3 \dots x_{Nx}, y_2 \dots y_{Ny}, Rxy_{ij}))$ ,  $i = \overline{1, Nx}$ ,  $j = \overline{1, Ny}$  при ограничениях (4) и аналогичных для ЭВ нижнего ряда; координаты  $Rx$  и  $Ry$  определяются соотношениями (2) и аналогичными для ЭВ нижнего ряда; «диагональные» и «боковые» расстояния – соотношениями (7). Варьирование конфигураций ЭВ в МЛВ включает, таким образом, только компоненты векторов  $x$  и  $y$ .

Сложность задачи II обусловлена «неравнозначностью» переменных:  $x_1, x_{Nx+1}, y_1, y_{Ny+1}$  варьируются с учетом ограничений (4);  $x_i, y_j$  ( $i = \overline{1, Nx}$ ,  $j = \overline{1, Ny}$ ) варьируются с учетом этих ограничений и «задействованы» в вышеобозначенной процедуре минимизации;  $Rxy_{ij}$  – вычисляются и «задействованы» только в минимизации.

## Тестовые примеры

Тестирование задачи I можно проводить с помощью МЛВ для «широких» коридоров (для  $b \geq b_*$ ), задавая  $Nx, Ny \geq 2$  и произвольные начальные распределения ЭВ. Тогда в итоге должны получить равномерную конфигурацию ЭВ (5) и

(6) на обеих сторонах коридора.

Рассмотрим малоразмерные случаи для задачи II.

1)  $N_x = N_y = 1$  (рис. 2). Здесь решение очевидно: ЭВ «прижаты» к противоположным торцам коридора: верхний  $dx$  – в правом углу, нижний  $dy$  – в левом, или наоборот. Т. е., возможно, имеет место бифуркация [22, 23].

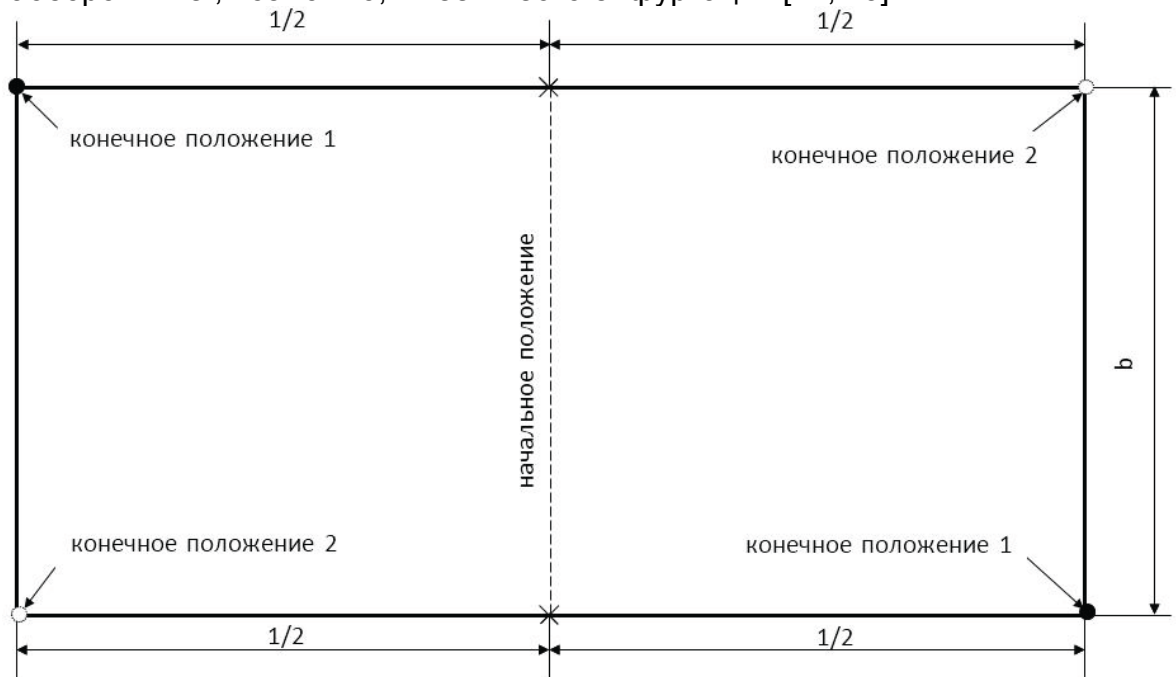


Рис. 2. Два ЭВ ( $N_x = N_y = 1$ ), безразмерные величины, искомое значение  $\max \min = R_{11} = \sqrt{b^2 + 1}$

2)  $N_x = 2, N_y = 1$  (рис. 3). Здесь решение единственно и также очевидно: верхние ЭВ  $dx_1$  и  $dx_2$  находятся в противоположных концах (верхних) коридора, а нижний  $dy_1$  – в центре нижней стороны ( $R_{y_1} = 0,5$ ).

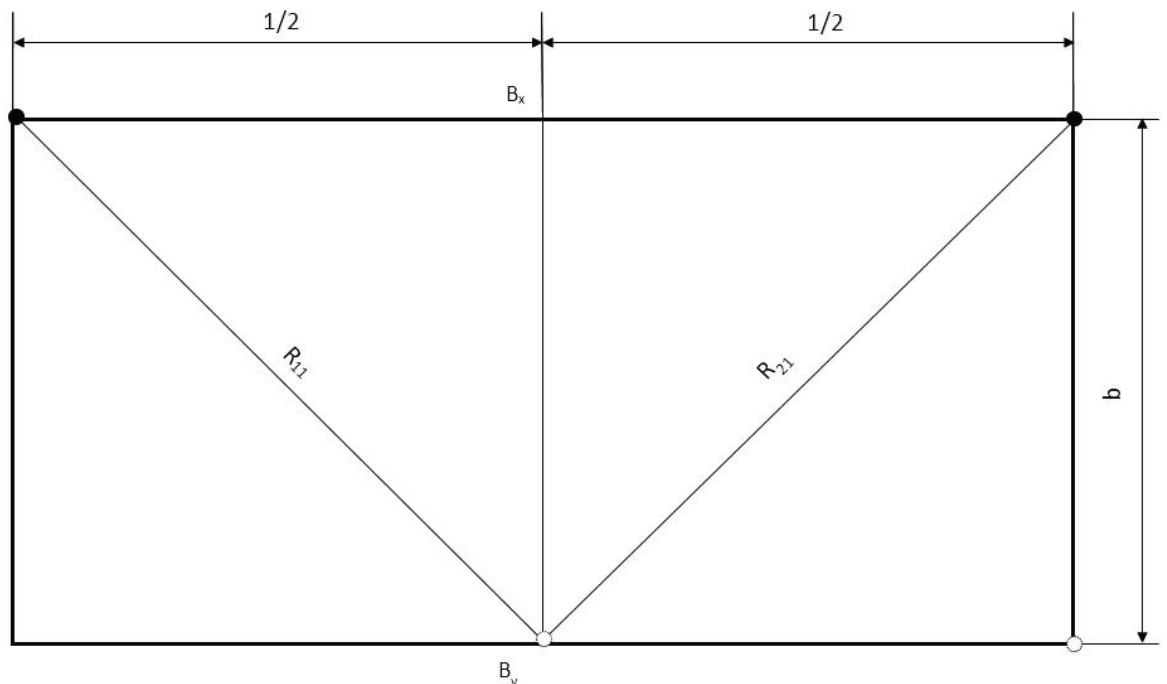


Рис. 3. Три ЭВ ( $N_x = 2, N_y = 1$ ), безразмерные величины, искомое значение  $\max \min = R_{11} = R_{21} = \sqrt{b^2 + 1/4}$

3) Наконец, более сложный случай  $N_x = N_y = 2$  (рис. 4). Для простоты принят к рассмотрению случай исчезающе малой толщины всех четырех ЭВ:  $dx_1 \approx dx_2 \approx$

$\approx dy_1 \approx dy_2 \approx 0$ , т. е.  $kx, ky = o(1)$ , т. е. порядка точности вычислений по МЛВ (на рис. 4, ЭВ – точечные). Так же как и ранее, возможно, имеет место бифуркация (рис. 4), «пунктирный» параллелограмм симметричен «сплошному» относительно средней линии коридора  $D_x D_y$  (параллелограмма, а не трапеции в силу равноправия координат  $x$  и  $y$ ).

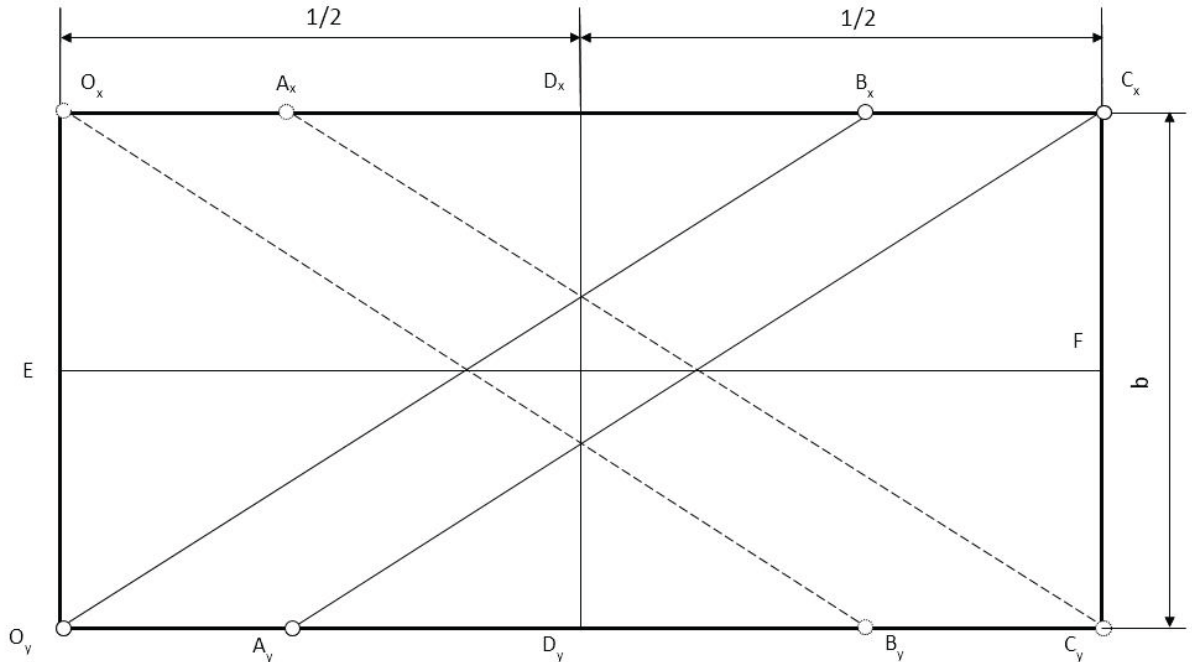


Рис. 4. Четыре ЭВ ( $N_x = N_y = 2$ ), безразмерные величины

Очевидно, что решению задачи максимина отвечает нахождение одного ЭВ на верхней стороне коридора в торце ( $x_3 = 0$ ) и одного ЭВ на нижней ( $y_1 = 0$ ). Аналогичная конфигурация имеет место для «пунктирного» решения (рис. 4).

Для параллелограмма  $B_x C_x O_y A_y$  (его длин и сторон, рис. 4) имеем:

$$B_x C_x = x_2 = O_y A_y = y_2 = u; R_{11}^2 = (1 - u)^2 + b^2; R_{12}^2 = (1 - 2u)^2 + b^2;$$

$$R_{11} = B_x O_y; R_{12} = B_x A_y; R_{22} = C_x A_y = R_{11}; R_{21} = C_x O_y = \sqrt{1 + b^2}.$$

Здесь для простоты обозначено  $x_2 = y_2 = u$ ; для сторон параллелограмма для краткости в обозначениях  $R_{xy_{ij}}$  опущены буквы  $xy$ .

Исходная задача максимина (возможно, недифференцируемой оптимизации) сводится к обычным задачам нахождения максимума разбиением ее на три подзадачи.

Поскольку  $R_{21}$  является максимальной из  $R_{11}$  и  $R_{12}$ , то тогда имеем:

$$1. \min(R_{11}, u, R_{12}) = R_{11}. \text{ Найти } \max f_1(u) = R_{11}^2$$

$$2. \min(R_{11}, u, R_{12}) = u. \text{ Найти } \max f_2(u) = u^2$$

$$3. \min(R_{11}, u, R_{12}) = R_{12}. \text{ Найти } \max f_3(u) = R_{12}^2$$

На всех этапах проводится максимизация по  $0 \leq u \leq 1$ .

Подзадача 1. Из условий  $R_{11} \leq u$  и  $R_{11} \leq R_{12}$  получаем ограничения:

$$u \geq (1 + b^2)/2 \tag{8}$$

$$\text{и } u \geq 2/3 \tag{9}$$

соответственно; кроме того  $u \leq 1$ . В соответствии с теоремой Куна-Таккера [24] максимум целевой функции  $f_1(u) = R_{11}^2(u)$  при учете вышеприведенных ограничений реализуется с помощью функции Лагранжа  $L(u) = R_{11}^2(u) + l_1 g_1(u) + l_2 g_2(u) + l_3 g_3(u)$ , где  $l_k \leq 0$  – неположительные множители Лагранжа, а  $g_k(u) \leq 0$  – неположительные ограничители:  $k = 1, 2, 3$ . Здесь  $g_1 = u - 1, g_2 = 2/3 - u, g_3 = 1 + b^2 - 2u$  согласно (8) и (9).

Имеют место соотношения:  $l_k g_k(u) = 0, k = 1, 2, 3$  и еще условие стационарности в оптимальной точке:  $dL/du = 0$ , откуда имеем:

$$2u = 2 + l_2 = 2l_3. \quad (10)$$

Очевидно  $l_1 = 0$ , так как иначе  $u \equiv 1$ , т. е. широкий коридор  $b \geq 1$ .

Рассмотрим сценарии.

1.1.  $l_2 l_3 \neq 0$ , тогда  $g_2 = g_3 = 0$ , откуда  $u_{opt} = 2/3$  и  $u_{opt} = (1 + b^2)/2$ , что возможно при  $b = b_{**} = 3^{-0.5} \approx 0,577$ .

1.2.  $l_2 = l_3 = 0$ . Тогда (10) дает  $u_{opt} \equiv 1$  рассмотрено выше.

1.3.  $l_2 = 0, l_3 \neq 0$ . Тогда получаем

$$u_{opt} = (1 + b^2)/2. \quad (11)$$

В совокупности с неравенством (9) равенство (11) приводит к ограничению  $b \geq b_{**} = 3^{-0.5} \approx 0,577$ .

Наконец (10) + (11) дает  $l_3 = u_{opt} - 1 \leq 0$ , т. е. все условия Куна-Таккера выполнены.

1.4.  $l_2 \neq 0, l_3 = 0$ . Тогда получим

$$u_{opt} = 2/3. \quad (12)$$

Это соотношение вкуче с (8) дает

$$b \leq b_{**} = 3^{-0.5}. \quad (13)$$

Подзадача 2. Из условий  $u^2 \leq R_{11}^2$  и  $u^2 \leq R_{12}^2$  получим:

$$u \leq (1 + b^2)/2$$

$$\text{и } 3u^2 - 4u + 1 + b^2 \geq 0.$$

Тогда  $g_1 = -u = 0, g_2 = 2u - 1 - b^2, g_3 = 4u - 3u^2 - 1 - b^2,$

$L(u) = f_2(u) + l_2 g_2 + l_3 g_3$ , где  $f_2(u) = u^2$  и  $dL/du = 2u + 2l_2 + 2l_3(2 - 3u)$ .

Из условия  $dL/du = 0$  имеем  $l_2 + 2l_3 + (1 - 3l_3)u = 0$ . (14)

Сценарий 2.1.  $l_2 l_3 \neq 0$ . Решение идентично 1.1.

Сценарий 2.2.  $l_2 = l_3 = 0$ . Тогда из (14) следует  $u_{opt} \equiv 0$ , т. е. неудовлетворительное решение.

Сценарий 2.3.  $l_2 = 0, l_3 \neq 0$ . Тогда получаем:  $g_3 = 4u - 3u^2 - 1 - b^2 = 0$ ,

откуда  $u_{\pm} = (2 \pm \sqrt{1 - b^2})/3$  и условие (13). Нетрудно проверить, что корень  $u_+$  не удовлетворяет неравенству  $u \leq (1 + b^2)/2$ , а  $u_-$  удовлетворяет. Наконец, равенство (14) для  $u = u_-$  дает  $l_3 = u_-(3u_- - 2)$ , знаменатель правой части неположителен и  $l_3 \leq 0$ .

Далее имеем  $f_2(u_-) = (5 - 3b^2 - 4\sqrt{1 - b^2})/9$ .

Согласно (12) и (13)  $f_1(2/3) = 1/9 + b^2$ , и можно показать, что эта величина превосходит предыдущую, т. е. сценарий 2.3 не реализуется.

Сценарий 2.4.  $l_3 = 0, l_2 \neq 0$ . Имеем:  $g_2 = 0, u_{opt} = (1 + b^2)/2$ , равенство (14) дает необходимое условие  $l_2 = -u_{opt} < 0$ . Наконец, учитывая (11), получим:

$f_2(u_{opt}) = f_1(u_{opt})$ , т. е. совпадение сценария 2.4. с 1.3.

Подзадача 3. Из условий  $R_{12}^2 \leq R_{11}^2$  и  $R_{12}^2 \leq u^2$  находим ограничители:

$$u \leq 2/3,$$

$$3u^2 - 4u + 1 + b^2 \leq 0,$$

$$g_2(u) = u - 2/3, g_3(u) = 3u^2 - 4u + 1 + b^2,$$

$$dL/du = 4(2u - 1) + l_2 + 2l_3(3u - 2) = 0. \quad (15)$$

Сценарий 3.1.  $l_2 l_3 \neq 0$ . Тогда,  $g_2 = g_3 = 0$ , откуда  $u_{opt} = 2/3$  и  $b = b_{**}$ , т. е. решение в «одной точке».

Сценарий 3.2.  $l_2 = l_3 = 0$ , тогда из равенства (15) имеем  $u_{opt} = 0,5$  и  $f_3(0,5) = b^2$ , но это минимум  $f_3$ , а не максимум.

Сценарий 3.3.  $l_2 = 0, l_3 \neq 0$ . Тогда  $g_3(u) = 3u^2 - 4u + 1 + b^2 = 0$ .

Однако  $f_3(u_-) = (5 - 3b^2 - 4\sqrt{1 - b^2})/9$ , и также как в 2.3 можно показать, что  $f_1(2/3) > f_3(u_-)$ .



Сценарий 3.4.  $l_3 = 0, l_2 \neq 0$ . Имеем:  $g_2 = 0, u_{opt} = 2/3$ , равенство (15) дает  $l_2 = -4/3$  и, далее, получаем  $f_3(2/3) = f_1(2/3)$ , т. е. совпадение сценария 3.4 с 1.4.

В итоге имеем: для «относительно» узких коридоров  $b \geq b_{**} u_{opt} = (1 + b^2)/2$ , а для «весьма» узких  $b \leq b_{**} u_{opt} = 2/3$ .

Ясно, что аналитическое решение для большего количества ЭВ весьма затруднительно, если вообще возможно.

## Проверочные расчеты

В проведенной серии расчетах начальная конфигурация ЭВ была принята равномерной, включая крайние ЭВ:  $x0_i = 1,0/(Nx + 1); y0_j = 1,0/(Ny + 1); i = \overline{1, Nx + 1}; j = \overline{1, Ny + 1}$ .

1. Тестирование задачи I реализовано на примере «широкого» коридора:

$Nx = 4; Ny = 7; L = 30,25$  м. Ширины ЭВ:  $dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0,7$  м;  $dx_4 = 1,0$  м,  $dy_j = 0,9$  м,  $j = \overline{1, Ny}$ . Безразмерная (искусственная) ширина коридора задается соотношением:  $b = 1,1b_*$ .

С точностью вычислений на ПК условие нормировки (4) выполнялось на каждой итерации. После 50 внешних итераций конфигурация ЭВ на нижней стороне коридора совпала с расчетной (крайние ЭВ – «прижаты» к торцам):  $y_1^{(50)} = y_1^* = y_8^{(50)} = y_8^* = 0,014876$ . Далее,  $y_2^{(50)} = \dots = y_7^{(50)} = 0,16170799$ , отличие от точного значения (5)  $M_y = 0,162203856$  составляет 0,306 %. На верхней стороне коридора, при этом, равномерная конфигурация получена не была.

2. Тестирование МЛВ для задачи II с 4 ЭВ ( $Nx = Ny = 2$ ).

Начальные координаты ЭВ также как и в п. 4.1 соответствуют равномерно-му распределению.  $L = 25$  м; «бесконечно» узкие ЭВ:  $dx_1 = dx_2 = dy_1 = dy_2 = 10^{-17}$ . Начальные (размерные) шаги варьирования  $h_x^{(0)} = h_y^{(0)} = 2,5$  м. Прогон программы для всех вариантов был ограничен 10 внешними итерациями.

2.1. «Умеренно» узкий коридор ( $b > b_{**}$ ),  $b = 0,6$ . Получим:  $x_1^{(10)} = y_4^{(10)} = 1,302 \cdot 10^{-4}$  (точное значение 0);  $x_2^{(10)} = y_2^{(10)} = 0,680013$  (точное значение 0,68), отличие 0,0019 %. Верхний индекс 10 символизирует упомянутым 10 итерациям. Это решение соответствует «пунктирному» параллелограмму на рис. 4.

2.2. «Весьма» узкий коридор ( $b < b_{**}$ ),  $b = 0,5$ . Получим:

$x_1^{(10)} = y_4^{(10)} = 1,302 \cdot 10^{-4}$  (точное значение 0);  $x_2^{(10)} = y_2^{(10)} = 0,666536$  (точное значение 2/3), отличие 0,02 %. Также имеем «пунктирный» параллелограмм.

Для  $b = 0,4$  получим:  $x_1^{(10)} = y_4^{(10)} = 0,3333\dots$  (точное значение 1/3);  $x_2^{(10)} = y_2^{(10)} = 0,666536$  (точное значение 2/3), отличие 0,02 %. Здесь уже имеем «сплошной» параллелограмм на рис. 4.

2.3. «Весьма» узкий коридор  $b = 2,4$ . Существующая конфигурация ЭВ (верхний индекс real):

$x_1^{(real)} = 2,18; x_2^{(real)} = 9,0; x_3^{(real)} = 8,95; x_4^{(real)} = 8,45; x_5^{(real)} = 1,67$  м;  
 $y_1^{(real)} = 2,71; y_2^{(real)} = 4,9; y_3^{(real)} = 4,5; y_4^{(real)} = 5,3; y_5^{(real)} = 3,45; y_6^{(real)} = 3,9; y_7^{(real)} = 3,4;$   
 $y_8^{(real)} = 2,09$  м.

Остальные данные для расчета представлены в задаче п. 1.

В результате расчета после 50 внешних итераций оказалось, что оба крайних ЭВ «прижаты» к торцам:  $y_1^{(50)} = y_8^{(50)} = 0,014876$ . Оказалось, что оптимально близкие к 1 отношения  $\mu_x = x^{(real)}/(L \cdot x^{(50)})$  и, соответственно,  $\mu_y = y^{(real)}/(L \cdot y^{(50)})$  составили  $\mu_{x,3} = 0,9766$  и  $\mu_{y,4} = 0,9618$ . Искомая величина  $M_{xyR} = 0,120792$  реализована на «диагонали»  $R_{23}$ .

Наконец отметим, что упомянутых 50 итераций было достаточно для достижения малости величины  $\delta = (\|\bar{x}^{(k+1)} - \bar{x}^{(k)}\|^2 + \|\bar{y}^{(k+1)} - \bar{y}^{(k)}\|^2)^{1/2}$ , т. е. норм векторов на двух соседних итерациях. Было получено  $\delta = 4,56 \cdot 10^{-13}$ .

Наконец отметим, что «эксплуатационное» значение  $\min M_{xy}^{(\text{real})} = 0,08045$ , что на ~50 % меньше вычисленного значения 0,120792.

### Заключение

Разработанная программа расчета может быть использована для оптимального проектирования эвакуационных выходов в зданиях коридорного типа (административных, торговых центрах и т. п.). Однако остается нерешенный вопрос о единственности решения и работу целесообразно продолжить.

### Список литературы

1. Демьянов В.Ф. и др. К теории нелинейных минимаксных задач // УМН, 1971. Т. 26. Вып. 3 (159). С. 53.
2. Гермейер Ю.Б. К задаче отыскания максимина с ограничениями // ЖВММФ, 1970. Т. 10, № 1. С. 39.
3. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, ГРФММЛ, 1981. 400 с.
4. Федоров В.В. Численные методы максимина. М.: Наука, ГРФМЛ, 1979. 280 с.
5. Демьянов В.Ф. и др. Введение в минимакс. М.: Наука, ГРФМЛ, 1972. 368 с.
6. Моисеев Н.Н. и др. Методы оптимизации. М.: Наука, ГРФМЛ, 1978. 352 с.
7. Моисеев Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем, 2-е изд. М.: ЛЕНАНД, 2020. 424 с.
8. Понтрягин Л.С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, ГРФМЛ, 1969. 384 с.
9. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, ГРФМЛ, 1982. 432 с.
10. Демьянов В.Ф. и др. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, ГРФМЛ, 1981. 424 с.
11. Гирсанов И.В. Лекции по теории экстремальных задач. М.: Изд-во МГУ, 1970. 119 с.
12. Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы. М.: Наука, ГРФМЛ, 1990. 488 с.
13. Грешилов А.А. Прикладные задачи математического программирования. М.: Изд-во МГТУ, 1990. 189 с.
14. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, ГРФМЛ, 1988. 552 с.
15. Лесин В.В. и др. Основы методов оптимизации. М.: Изд-во МАИ, 1988. 344 с.
16. Аоки М. Введение в методы оптимизации. М.: Наука, ГРФМЛ, 1977. 344 с.
17. Уайлд Дж. Д. Методы поиска экстремума. М.: Наука, ГРФМЛ, 1967. 268 с.
18. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. М.: Радио и связь, 1989. 128 с.
19. Полак Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, ГРФМЛ, 1983. 384 с.
20. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: Изд-во «Мир», 1974. 536 с.
21. Черноушко Ф.Л. и др. Вариационные задачи механики и управления (Численные методы). М.: Наука, 1973. 238 с.
22. Арнольд В.И. Теория катастроф. М.: МГУ, 1983. 80 с.
23. Малинецкий Г.Г. и др. Современные проблемы нелинейной динамики. М.: Эдиториал УРСС, 2003. 336 с.

24. Самаров К.Л. Учебно-методическое пособие по разделу функции нескольких переменных. Нелинейное программирование. 2009 [Электронный ресурс]. URL: <https://www.resolventa.ru/>.

**Статья поступила в редакцию 25.05.2022;  
одобрена после рецензирования 08.06.2022;  
принята к публикации 15.06.2022.**

**Барановская Елена Николаевна** – научный сотрудник. Тел. (495) 524-81-37. E-mail: K708@yandex.ru; **Леончук Петр Алексеевич** – начальник сектора. Тел. (495) 524-82-09. E-mail: pa.leonchuk@yandex.ru; **Зуев Станислав Анатольевич** – кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник. Тел. (495) 524-83-45. E-mail: K708@yandex.ru; **Шамонин Валерий Геннадьевич** – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, старший научный сотрудник. Тел. (495) 524-82-57. E-mail: K708@yandex.ru.

Всероссийский ордена “Знак Почета” научно-исследовательский институт противопожарной обороны Министерства Российской Федерации по делам гражданской обороны, чрезвычайным ситуациям и ликвидации последствий стихийных бедствий (ФГБУ ВНИИПО МЧС России), г. Балашиха, Московская область, Россия.

**Elena N. Baranovskaya** – Researcher. Phone (495) 524-81-37; **Petr A. Leonchuk** – Chief of Sector. Phone (495) 524-82-09; **Stanislav A. Zuev** – Candidate of Technical Sciences, Leading Researcher. Phone (495) 524-83-45; **Valery G. Shamonin** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher, Senior Researcher. Phone: 524-82-57.

All-Russian Research Institute for Fire Protection (VNIIPPO), the Ministry of the Russian Federation for Civil Defence, Emergencies and Elimination of Consequences of Natural Disasters (EMERCOM of Russia), Balashikha, Moscow region, Russia.