

УДК 614.838.44:536.3

doi: 10.37657/vniipo.avpb.2024.96.61.001

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЭВАКУАЦИОННЫХ ВЫХОДОВ В ЗДАНИЯХ С КОРИДОРАМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ФОРМЫ. СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЙ

Алексей Викторович Голкин, Валерий Геннадьевич Шамонин, Станислав Анатольевич Зувев, Светлана Юрьевна Хатунцева

Всероссийский ордена “Знак Почета” научно-исследовательский институт противопожарной обороны Министерства Российской Федерации по делам гражданской обороны, чрезвычайным ситуациям и ликвидации последствий стихийных бедствий (ФГБУ ВНИИПО МЧС России), г. Балашиха, Московская область, Россия.

Аннотация. Рассмотрена возможность решения задачи оптимального расположения эвакуационных выходов (ЭВ) в коридорах эллиптического типа при максимальной удаленности ЭВ друг от друга, минимизирующей смешение людских потоков (и, соответственно, паники) при эвакуации в случае пожара или других чрезвычайных ситуаций. Рассматривалось расположение ЭВ по обеим сторонам коридора, в торцах которого имеется хотя бы один ЭВ, ведущий на лестничную клетку или в безопасную зону. Предложена последовательность шагов для реализации поставленной задачи – нахождению оптимальной конфигурации заданного числа ЭВ на обеих сторонах коридора.

Ключевые слова: эвакуационный выход, криволинейный коридор, оптимальная конфигурация, расчет координат, число эвакуационных выходов

Для цитирования: Проектирование эвакуационных выходов в зданиях с коридорами эллиптической формы. Схема исследований / А.В. Голкин, В.Г. Шамонин, С.А. Зувев, С.Ю. Хатунцева // Актуальные вопросы пожарной безопасности. 2024. № 2 (20). С. 6–12. <https://doi.org/10.37657/vniipo.avpb.2024.96.61.001>.

DESIGN OF EMERGENCY EXITS IN BUILDINGS WITH ELLIPTICAL CORRIDORS. RESEARCH DESIGN

Alexey V. Golkin, Valery G. Shamonin, Stanislav A. Zuev, Svetlana Yu. Khatuntseva

All-Russian Research Institute for Fire Protection (VNIIPO), the Ministry of the Russian Federation for Civil Defence, Emergencies and Elimination of Consequences of Natural Disasters (EMERCOM of Russia), Balashikha, Moscow region, Russia.

Abstract. There was considered the possibility of solving the problem of emergency exits (EE) optimal location in elliptical corridors with the maximum distance of EEs from each other, minimizing the mixing of human flows (and, accordingly, panic) during evacuation in case of fire or other emergencies. There was examined the location of EE on both sides of the corridor, with at least one EE at the end of the corridor leading to a staircase or safe area. A sequence of steps was proposed to implement the task – to find the optimal configuration of a given number of EEs on both sides of the corridor.

Keywords: emergency exit, curved corridor, optimal configuration, coordinates calculation, number of emergency exits

For citation: Golkin A.V., Shamonin V.G., Zuev S.A., Khatuntseva S.Yu. Design of emergency exits in buildings with elliptical corridors. Research design. Aktual'nye voprosy pozharnoi bezopasnosti – Current Fire Safety Issues, 2024, no. 2, pp. 6-12. (In Russ.). <https://doi.org/10.37657/vniipo.avpb.2024.96.61.001>.

Введение

Работа является продолжением предыдущих статей [1–4]. Рассматривается вопрос об оптимальном расположении эвакуационных выходов (ЭВ) по обеим сторонам коридора, в торцах которого имеется хотя бы один ЭВ, ведущий на лестничную клетку или в безопасную зону.

Настоящая работа, как и статья [2], существенно сложнее статьи [1] в том отношении, что рассматриваемая область (коридор эллиптической формы) не является выпуклой. Также как и в статьях [1–4] при отсутствии конкретных проектных решений по расположению ЭВ, обусловленных конфигурацией этажа, предлагается решение по максимальной удаленности ЭВ друг от друга, минимизирующее смешение людских потоков (и, соответственно, панику) при эвакуации в случае пожара или других чрезвычайных ситуаций.

Проектирование коридоров эллиптического типа значительно сложнее рассмотренных в статьях [3, 4] кольцевых, хотя последние являются частным случаем первых. Предложена последовательность шагов для реализации поставленной задачи – нахождению оптимальной конфигурации заданного числа ЭВ на обеих сторонах коридора.

Схема решения задачи

Рассматривается следующая последовательность действий, необходимых для решения поставленной задачи.

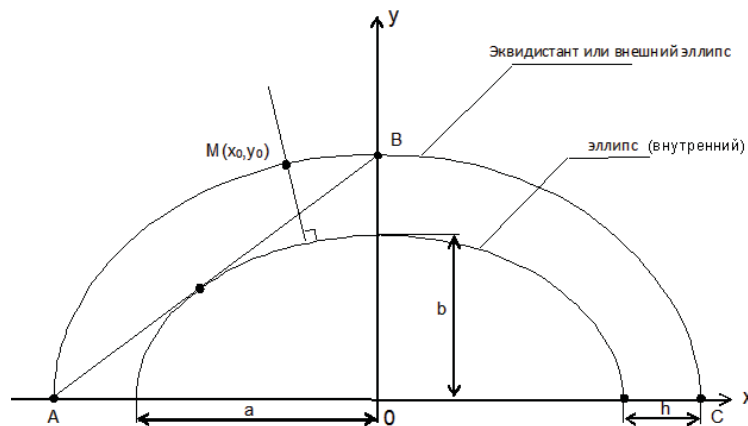
По заданным параметрам эллипса a и b , а также ширине коридора h вычислить траекторию эквидистанта (см. рисунок) и выбрать его расположение (внутри или снаружи эллипса).

Также как и в статьях [3, 4] вычислить пороговое значение ширины h_* , разделяющее широкие и узкие коридоры.

Расстояние между произвольными точками на эллипсе и эквидистанте – выбор экономичного (по времени расчета) алгоритма.

Аналогично статьям [3, 4] вывод расчетных формул для кратчайших расстояний между ЭВ на эллипсе и эквидистанте (это будут хорды, касательные к эллипсу и дуги эллипса).

Задание начального расположения ЭВ на обеих сторонах коридора, старт МЛВ [5].



Схематическое изображение эллипса и его эквидистанта (огibaющие нормали постоянной длины h)

Далее представлена дополнительная информация по первым трем пунктам.

Как будет ясно из дальнейшего изложения, в нашем случае рассмотрение эквидистанта проще и выгодней внутреннего. Формулы для внешнего к эллипсу эквидистанта ($h = const$) представлены, например, в статье [6] и имеют вид:

$$\begin{cases} X = acost + hbsint/Ds \\ Y = bsint + hasint/Ds \end{cases} \quad (1)$$

где $DS = ((asint)^2 + (bcost)^2)^{1/2}$.

Здесь первые члены в правой части формулы (1) – параметрическое представление эллипса

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1. \quad (2)$$

Для определения координат точек касания (см. рисунок) воспользуемся уравнением касательной к эллипсу [7]:

$$xx_t/a^2 + yy_t/b^2 = 0, \quad (3)$$

где индекс t (*tangent*) символизирует точку касания.

Подставляя в (3) концевые координаты точек $A(-a - h_*, 0)$ и $B(0, b + h_*)$ (см. рисунок), получим:

$$x_t = -x^2/(a + h_*), y_t = b^2/(b + h_*),$$

подставляя далее эти величины в уравнение эллипса (2), получим:

$$h_*^4 + 2(a + b)h_*^3 + 4abh_*^2 - (ab)^2 = 0. \quad (4)$$

Разделив (4) на обезразмеривающий параметр (a^4 или b^4) и обозначая $z = h_*/a$ (или h_*/b), будем иметь:

$$\Phi(z) = z^4 + 2(1 + \beta)z^3 + 4\beta z^2 - \beta^2 = 0, \quad (5)$$

где обозначено $\beta = a/b$ (или b/a).

Дифференцируя дважды (5), имеем:

$$\Phi' = 4z^3 + 6(1 + \beta)z^2 + 8\beta z \geq 0, \quad \Phi'' = 12z^2 + 12(1 + \beta)z + 8\beta > 0.$$

Поскольку $\Phi(0) = -\beta^2 < 0$, $\Phi' > 0$, $\Phi'' > 0$ при $z > 0$, то очевидно, что уравнение (5) имеет единственный положительный корень, который проще всего найти методом дихотомии (половинного деления) на отрезке, скажем $[0, \sqrt{\beta}]$, так как $\Phi(\sqrt{\beta}) > 0$.

В пределе перехода к окружности ($\beta = 1$) получим $\Phi(z) = (z + 1)^2(z + \sqrt{2} + 1)(z - \sqrt{2} + 1) = 0$, т. е. единственный положительный корень равен $\sqrt{2} - 1$, что было получено в статье [3] из элементарных геометрических соображений.

Уравнение 4-й степени (5) – однопараметрическое (все три коэффициента зависят только от параметра β); попытки его решения в радикалах связаны с его сведением к кубическому уравнению (три способа представлены в книге [8]) сопряжены с очень громоздкими алгебраическими операциями. Возможность решения уравнения (5) в радикалах иным способом, учитывая вышеуказанную однопараметричность, представляет академический интерес, поэтому нами выбран простой представленный выше численный метод. Известно (см., например, книгу [9]), что расстояния между точками на дуге эллипса не выражаются через элементарные функции, а рассчитываются с помощью медленно сходящихся рядов (см., например, книгу [10]), представляющих собой эллиптические интегралы 2-го рода [8]:

$$E(\varphi, k) = \int_0^\varphi (1 - (kSint)^2)^{1/2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(1/2)_n}{n!} k^{2n} S_{2n}(\varphi),$$

$$\text{где } (\alpha)_0 = 1; (\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)}, n > 1,$$

$$S_{2n}(\varphi) = \int_0^\varphi (Sint)^{2n} dt = 2^{-2n} \left(\binom{2n}{n} \varphi + \sum_{m=1}^n (-1)^m \binom{2n}{n-m} \frac{\sin(2m\varphi)}{m} \right).$$

Здесь Γ – Гамма-функция Эйлера. Ясно, что при многократном варьировании расстояний между ЭВ на верхней половине эллипса (см. рисунок) после старта МЛВ нужна простая экономичная численная процедура. А именно, для вычисления интеграла $\int_{t_1}^{t_2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2} dt = \int_{t_1}^{t_2} ((a \cos t)^2 + (b \sin t)^2)^{1/2}$ при параметризации эллипса $x = a \cos t, y = b \sin t$ можно воспользоваться одной из квадратурных формул.

Для эквидистанта такой проблемы не возникает. Как ясно из содержания статей [3, 4], расстояния между ЭВ на эквидистанте и между таковыми на эллипсе являются либо хордами, либо отрезками касательных к эллипсу и длинами дуг эллипса. Другими словами, рассчитывать длину дуг эквидистанта нет необходимости, что понятно из кинематических соображений (задача преследования). Но, с другой стороны, расстояния между ЭВ на эквидистанте (а также на эллипсе) по длине дуги должны удовлетворять ограничениям (учитывая ширину ЭВ), представленным в статье [3]. Необходимые для этого приближенные формулы для длины дуги «полуэллипса» (см. рисунок) (полный эллиптический интеграл 2-го рода) есть в сети Интернет, но для эквидистанта такую формулу надо еще получить. Вторая формула Рамануджана для полупериметра эллипса имеет вид:

$$L_{1/2} \cong \pi(a+b)/2 \left[1 + \frac{3g^2}{(10 + (4 - 3g^2)^{1/2})} \right],$$

где $g = (a-b)/(a+b)$.

Эта формула точна для полукруга ($b = a$) $L_{1/2} = \pi a$, а для «блина» $b = 0$ имеем $L_{1/2} = 7\pi a/11$. Но множитель $7\pi/11 \cong 1,999195$, т. е. почти точное значение 2.

Наконец, если для элемента дуги эллипса имеем относительно простую формулу (предтеча эллиптического интеграла 2-го рода)

$$ds = a(1 - e^2 \cdot \cos^2 t)^{1/2} dt,$$

где $e = (1 - b/a^2)^{1/2}$ – эксцентриситет эллипса, то для эквидистанта $ds = (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2)^{1/2} dt$ дифференцирование по «времени» t соотношений (1) приводит к очень громоздкой формуле для ds .

Использование квадратурной формулы Симпсона [9, 11] для расчета расстояния между точками на дуге эллипса сопряжено с трудностями: как выбирать число разбиений N отрезка, в которых подсчитываются значения ординат $y_0, y_1, \dots, y_{2N-1}, y_{2N}$ (формула (2)), а также оценку погрешности формулы Симпсона, где фигурирует максимум четвертой производной $y(x)$ по формуле (2) – весьма громоздкое выражение.

Другая возможность – построение кубического сплайна [11, 12]. При параметризации эллипса $x = a \cos t, y = b \sin t$ и использовании формулы (1) на отрезке $0 \leq t \leq \pi/2$ получаем множество узлов $\{x_k, y_k\}$ для эллипса $g(x)$ и $\{X_k, Y_k\}$ для эквидистанта $G(X)$ – узлов интерполяции. Обычно полагается равенство 0 вторых производных интерполянтов g и G на концах отрезка $[0; \pi/2]$, либо задаются их значения, исходя из зависимостей $y(x)$ и $Y(X)$ [11, 12]. Однако для эллипса имеем: $d^2y/dx^2 \rightarrow -\infty, x \rightarrow a$ (и аналогично для эквидистанта). Поэтому следует, скажем, $d^2g/dx^2(a) = -1010$, либо строить комбинированный интерполянт. А именно, выбрав узел стыка x_* на участке $[0; x_*]$ строить интерполянт для $y(x)$, а на $[x_*; \pi/2]$, – $x(y)$ по формуле (2), предварительно вычислив величины вторых производных в точке стыка (x_*, y_*) .

В любом случае вычисление интерполяционных коэффициентов сводит-

ся к решению линейной алгебраической системы с трехдиагональной матрицей [11, 12]; лучше всего воспользоваться методом неортогональной прогонки [13]. А для эквидистанта ситуация намного сложнее, поскольку для него необходимо еще получить приближенное аналитическое выражение $Y(X)$.

Альтернативная возможность: внешняя сторона коридора – также эллипс:

$$x^2/(a+h)^2 + y^2/(b+h)^2 = 1, \quad (7)$$

а также параметрическое представление $x = (a+h)\text{cost}, y = (b+h)\text{sint}$.

Возникает вопрос – насколько сильно меняется ширина коридора H при изменении координат внешнего (также внутреннего) эллипса? Для этой цели нужно найти $\max H(x_0, y_0)$ (а также $\min H$) при перемещении точки $M(x_0, y_0)$ по внешнему эллипсу (см. рисунок).

Известно, что $H(x_0, y_0) = \min |(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2|^{1/2}$ для $x, y \in (2)$ является длиной нормали из точки $M(x_0, y_0) \in (7)$ внешнего эллипса к внутреннему эллипсу, т. е.:

$$H(x_0, y_0) = |(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2|^{1/2}, \quad (8)$$

где (x_n, y_n) – координаты пересечения этой нормали (которые нужно найти) с внутренним эллипсом (2).

Уравнение нормали к эллипсу (2) [14]:

$$(X - x_n)dx_n + (Y - y_n)dy_n = 0,$$

где X, Y – координаты нормали. Подставляя сюда $X = x_0, Y = y_0$, а также параметрическое представление $x_n = a\text{cost}, y_n = b\text{sint}$, будем иметь:

$$-a\text{sint}(x_0 - a\text{cost}) + b\text{cost}(y_0 - b\text{sint}) = 0.$$

Это – тригонометрическое уравнение относительно параметра t («времени»). Чтобы избежать манипуляций с квадратными корнями, введем подстановку $z = \text{tg}(t/2)$, тогда:

$$\text{sint} = 2z/(1+z^2), \text{cost} = (1-z^2)/(1+z^2).$$

Подставляя эти величины, после некоторых преобразований получим

$$z^4 + 2[a(x_0 + a) - b^2]/(by_0)z^3 + 2[b^2 + a(x_0 - a)]/(by_0)z - 1 = 0. \quad (9)$$

Положительный корень этого уравнения позволил бы найти cost, sint , далее x_n, y_n и, наконец, согласно формуле (8) – $H(x_0, y_0)$. Однако, попытка аналитического решения уравнения (9), которое еще сложнее выражения (5), так как зависит от четырех параметров a, b, x_0, y_0 , сопряжена с очень громоздкими алгебраическими операциями. Поэтому, получение зависимости $H = H(x_0, y_0)$ реально только численно. Вопрос о предпочтительности выбора эквидистанта или эллипса пока остается открытым.

Для косвенного контроля правильности уравнения (9) перейдем к пределу кольцевого коридора $b = a = R$, тогда из выражения (7) имеем:

$$x_0^2 + y_0^2 = (R+h)^2,$$

и формула (9) принимает вид:

$$z^4 + 2x_0/y_0 z^3 + 2x_0/y_0 z - 1 = 0 \text{ или } (z^2 + 1)(z^2 + 2x_0/y_0)z - 1 = 0.$$

Положительный корень квадратного уравнения равен:

$$z_+ = \sqrt{(1 + x_0^2/y_0^2)} - x_0/y_0 = (R+h-x_0)/y_0.$$

После несложных преобразований получим:

$$x_n = R\text{cost} = Rx_0/(R+h); y_n = R\text{sint} = Ry_0/(R+h),$$

и далее:

$$H^2 = (x_0 - x_n)^2 + (y_0 - y_n)^2 = h^2.$$

Ясно, что чем меньше эксцентриситет внутреннего эллипса, тем меньше изменение ширины коридора H по его длине. Поэтому проектирование внешней границы коридора в форме эллипса, также как и эквидистанта, является очень

трудоемкой процедурой, связанной с разработкой вычислительных программ, значительно более сложных, чем для кольцевых коридоров [3, 4].

Выводы

Разработан план исследований по проектированию расположения эвакуационных выходов для коридоров в форме полуэллипса и его эквидистанта в зданиях коридорного типа (административных, торговых центрах и т. п.). Разработанный план предполагает возможность последующей корректировки разработанных впоследствии алгоритмов и программ, если часть ЭВ (на одной или обеих сторонах коридора) фиксирована по проекту.

Список литературы

1. О проектировании эвакуационных выходов в зданиях коридорного типа / *Е.Н. Барановская, П.А. Леончук, С.А. Зуев, В.Г. Шамолин* // Актуальные вопросы пожарной безопасности. 2022. № 3 (13). С. 6–16. doi: 10.37657/vniipo.avpb.2022.20.91.001.
2. О проектировании эвакуационных выходов в зданиях коридорного кусочно-прямоугольного типа / *В.Г. Шамолин, С.А. Зуев, П.А. Леончук, С.Ю. Хатунцева* // Актуальные вопросы пожарной безопасности. 2022. № 4 (14). С. 6–12. doi: 10.37657/vniipo.avpb.2022.19.29.001.
3. Проектирование эвакуационных выходов в зданиях коридорного кольцевого типа. Широкий коридор / *В.Г. Шамолин, А.В. Голкин, С.А. Зуев, С.Ю. Хатунцева* // Актуальные вопросы пожарной безопасности. 2023. № 4 (18). С. 16–24. <https://doi.org/10.37657/vniipo.avpb.2023.13.77.002>.
4. Проектирование эвакуационных выходов в зданиях коридорного кольцевого типа. Узкий коридор / *А.В. Голкин, В.Г. Шамолин, С.А. Зуев, С.Ю. Хатунцева* // Актуальные вопросы пожарной безопасности. 2024. № 1 (19). С. 6–9. <https://doi.org/10.37657/vniipo.avpb.2024.20.45.001>.
5. *Черноусько Ф.Л.* и др. Вариационные задачи механики и управления (Численные методы). М.: Изд-во «Наука», 1973. 238 с.
6. *Валишин А.А., Туманов И.А., Ахунд-заде М.Р.* Компьютерное построение сети эквидистант сложных негладких кривых на местности // Математическое моделирование и численные методы. 2020. № 2. С. 95–106.
7. *Беклемишев Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. 7-е изд., стер. Москва: Высш. шк. 1998. 320 с.
8. *Прасолов В.В.* и др. Эллиптические функции и алгебраические уравнения. Москва: Изд-во МЦНИО, 2022. 317 с.
9. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления; в 3-х т. Т. 2. Москва: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1966. 800 с.
10. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье; в 3-х т. Т. 3. Пер. с англ. Н.Я. Виленкина. Москва: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1967. 300 с.
11. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. Москва: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1989. 432 с.
12. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. Москва: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1980. 536 с.
13. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений.

Москва: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1978. 592 с.

14. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления; в 3-х т. Т. 1. Москва: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1966. 608 с.

**Статья поступила в редакцию 31.01.2024;
одобрена после рецензирования 29.02.2024;
принята к публикации 29.03.2024.**

Голкин Алексей Викторович – заместитель начальника отдела. Тел. (495) 524-82-53. E-mail: 2102pro@mail.ru; **Шамонин Валерий Геннадьевич** – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник. Тел. (495) 524-81-74. E-mail: k708@yandex.ru; **Зуев Станислав Анатольевич** – кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник. Тел. (495) 524-81-74. E-mail: k708@yandex.ru; **Хатунцева Светлана Юрьевна** – начальник сектора. Тел. (495) 524-81-74. E-mail: lu2986@yandex.ru.

Всероссийский ордена “Знак Почета” научно-исследовательский институт противопожарной обороны Министерства Российской Федерации по делам гражданской обороны, чрезвычайным ситуациям и ликвидации последствий стихийных бедствий (ФГБУ ВНИИПО МЧС России), г. Балашиха, Московская область, Россия.

Alexey V. Golkin – Deputy Head of Department. Phone (495) 524-82-53. E-mail: 2102pro@mail.ru; **Valery G. Shamonin** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher. Phone (495) 524-81-74. E-mail: k708@yandex.ru; **Stanislav A. Zuev** – Candidate of Technical Sciences, Leading Researcher. Phone (495) 524-81-74. E-mail: k708@yandex.ru; **Svetlana Yu. Khatuntseva** – Chief of Sector. Phone (495) 524-81-74. E-mail: lu2986@yandex.ru.

All-Russian Research Institute for Fire Protection (VNIIPPO), the Ministry of the Russian Federation for Civil Defence, Emergencies and Elimination of Consequences of Natural Disasters (EMERCOM of Russia), Balashikha, Moscow region, Russia.