

УДК 614.838.44:536.3

DOI: <https://doi.org/10.37657/vniipo.avpb.2024.92.36.001>

EDN: <https://elibrary.ru/ajzrlg>

## ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЭВАКУАЦИОННЫХ ВЫХОДОВ В ЗДАНИЯХ КОРИДОРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОРИДОРА

*Алексей Викторович Голкин, Валерий Геннадьевич Шамонин, Станислав Анатольевич Зувев, Светлана Юрьевна Хатунцева*

Всероссийский ордена “Знак Почета” научно-исследовательский институт противопожарной обороны Министерства Российской Федерации по делам гражданской обороны, чрезвычайным ситуациям и ликвидации последствий стихийных бедствий (ФГБУ ВНИИПО МЧС России), г. Балашиха, Московская область, Россия.

**Аннотация.** Рассмотрена возможность решения задачи выбора оптимальной ширины эвакуационных криволинейных коридоров, обе стороны которых представляют собой части эллипса для последующей минимизации смешения людских потоков (и, соответственно, предотвращения заторов при движении людей) при эвакуации в случае пожара или других чрезвычайных ситуаций. Анализируются вопросы о критерии разделения коридоров на широкие и узкие, о точности формулы Рамануджана и о расчете длины дуги эллипса.

**Ключевые слова:** ширина коридора, длина коридора, широкие и узкие коридоры, эксцентриситет эллипса, формула Рамануджана, длина дуги эллипса, эллиптический интеграл, формула Симпсона

**Для цитирования:** Проектирование эвакуационных выходов в зданиях коридорного эллиптического типа. Геометрические характеристики коридора / А.В. Голкин, В.Г. Шамонин, С.А. Зувев, С.Ю. Хатунцева // Актуальные вопросы пожарной безопасности. 2024. № 4 (22). С. 8–14. DOI 10.37657/vniipo.avpb.2024.92.36.001. EDN AJZRLG.

## DESIGN OF EVACUATION EXITS IN ELLIPTICAL CORRIDOR TYPE BUILDINGS. CORRIDOR GEOMETRY

*Alexey V. Golkin, Valery G. Shamonin, Stanislav A. Zuev, Svetlana Yu. Khatuntseva*

All-Russian Research Institute for Fire Protection (VNIIPO), the Ministry of the Russian Federation for Civil Defence, Emergencies and Elimination of Consequences of Natural Disasters (EMERCOM of Russia), Balashikha, Moscow region, Russia.

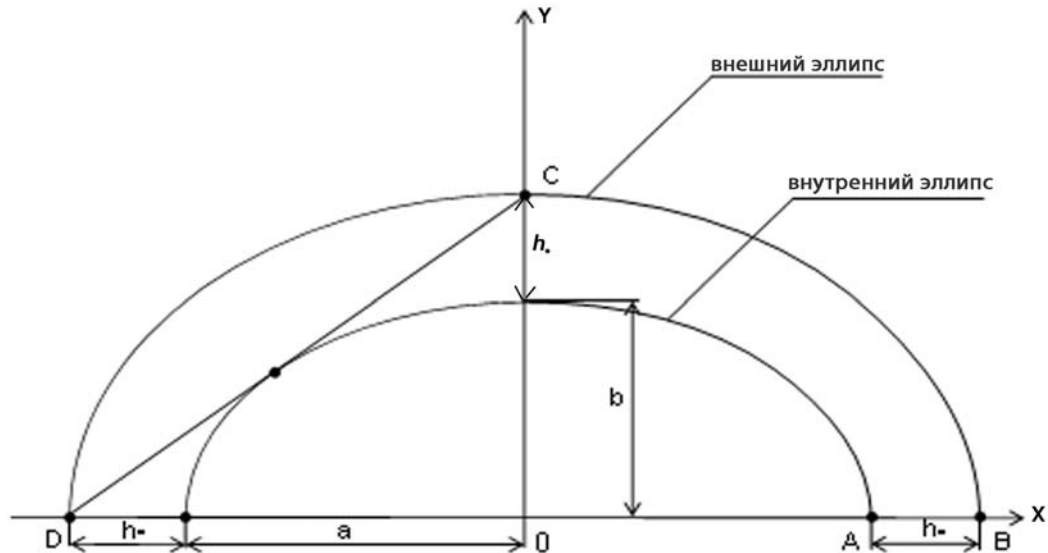
**Abstract.** There is considered the possibility of solving the problem of choosing the optimal width of evacuation curved corridors, both sides of which are parts of an ellipse to further minimize the mixing of human flows (and, accordingly, prevent congestion when people move) during evacuation in case of fire or other emergency situations. Questions on the criterion for dividing corridors into wide and narrow, on the accuracy of Ramanujan formula and on the calculation of the ellipse arc length are analysed.

**Keywords:** corridor width, corridor length, wide and narrow corridors, ellipse eccentricity, Ramanujan formula, ellipse arc length, elliptic integral, Simpson formula

**For citation:** Golkin A.V., Shamonin V.G., Zuev S.A., Khatuntseva S.Yu. Design of evacuation exits in elliptical corridor type buildings. Corridor Geometry. Aktual'nye voprosy pozharnoi bezopasnosti – Current Fire Safety Issues, 2024, no. 4, pp. 8-14. (In Russ.). DOI 10.37657/vniipo.avpb.2024.92.36.001. EDN AJZRLG.

**Введение**

Работа является продолжением предыдущих публикаций [1–4]. Рассматривается вопрос о геометрических характеристиках коридора, обе стороны которого являются верхними половинами эллипсов (см. рисунок), необходимых для оптимального проектирования эвакуационных выходов.



**Схематическое изображение эллиптического коридора**

Проводится анализ зависимости этих характеристик. При этом ширина коридора на вершине и обоих концах равна заданной проектной величине  $h_0$  (см. рисунок). Как было отмечено в статье [1], верхний эллипс не является эквидистантом по отношению к нижнему, т. е. ширина  $H \neq Const$ . В статье [2] была изучена зависимость  $H$  от длины коридора и эксцентриситета, а экстремум является максимумом или минимумом и какова его величина. При уменьшении эксцентриситета обоих эллипсов, т. е. при  $b \rightarrow a$  имеем  $H \rightarrow h_0$ .

Далее, как отмечено в статье [1], осложняющим фактором является то, что рассматриваемая область (коридор, рис. 1) является выпуклой.

**Широкие и узкие коридоры**

Для определения критической концевой безразмерной ширины коридора  $z = h_*/a$  в статье [1] было получено алгебраическое уравнение 4-й степени:

$$\Phi(z) = z^4 + 2(1 + \gamma)z^3 + 4\gamma z^2 - \gamma^2 = 0, \gamma = b/a. \tag{1}$$

Как видно из рисунка, искомый критерий разделен заключен в следующем (аналогично работам [3, 4]): широкий коридор соответствует расположению внутреннего эллипса под прямой CD, а узкий – его пересечению этой прямой в двух точках. «Разделительная» ширина коридора ( $h_*/a$  в точках C и D) отвечает касанию внутреннего эллипса прямой CD.

Единственный положительный корень уравнения (1) численно определялся методом дихотомии (половинного деления) на отрезке  $[0, \sqrt{\gamma}]$ , так как  $\Phi(\sqrt{\gamma}) > 0$ . При этом были заданы погрешности отклонения от 0 интервала и значений функции (1) на его концах, равные  $10^{-4}$ . В табл. 1 представлена зависимость значения корня  $z = h_*/a$  от «эксцентриситетного» параметра  $\gamma$  (или коэффициента сжатия). Значение корня 0,41419 для  $\gamma = 1$  отлично от его точного значения  $\sqrt{2} - 1$  [3, 4] на  $0,48 \cdot 10^{-4}$ .

**Зависимость «разделительной» ширины коридора от коэффициента сжатия**

$\gamma$	$h_*/a$
0,1	0,21146
0,2	0,17820
0,3	0,22196
0,4	0,25864
0,5	0,29076
0,6	0,31959
0,7	0,34591
0,8	0,37017
0,9	0,39287
1,0	0,41419

**Вычисление длины дуги эллипса**

Аналогично рассматриваемым расстояниям между эвакуационными выходами в кольцевых коридорах [3, 4] здесь необходимо рассчитывать их по длине дуги (между заданными точками), как для внутреннего, так и для внешнего эллипсов.

Как отмечено в работах [5–7], эллиптические кривые широко распространены в очертаниях различных геофизических объектов, естественных и искусственных тел, траекториях движений планет, спутников, элементарных частиц и др. Однако до настоящего времени расчетные зависимости по нахождению длины отдельных участков (дуги) эллипса, востребованные в инженерной практике, разработаны не в полной мере. В настоящее время широко используются таблицы с интерполяцией их значений [8, 9] (впервые составленные еще А.М. Лежандром в 1830-х гг.) для различных оценок, не громоздких задач (не требующих разработки программ для ЭВМ).

Как отмечено в предыдущей публикации [1] (со ссылкой на работу [10]), расстояния между точками на дуге эллипса не выражаются через элементарные функции, а рассчитываются с помощью медленно сходящихся рядов [11], представляющих собой эллиптические интегралы 2-го рода [12]:

$$E(\varphi, k) = \int_0^\varphi (1 - (k \sin t)^2)^{1/2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1/2)_n}{n!} k^{2n} S_{2n}(\varphi). \quad (2)$$

Отметим также публикацию [13], где интеграл (2) сводился к интегралу

$$E^*(\theta, \alpha) = \int_0^\theta (\cos t - \cos \alpha)^{\frac{1}{2}} dt, \quad \theta \leq \alpha,$$

с последующим разбиением отрезка (0,  $\theta$ ) и т. д.

Анализ вышеупомянутых публикаций [5–7, 13] позволил прийти к пониманию, что следует попытаться найти менее трудоемкие процедуры расчета эллиптических интегралов 2-го рода. В нашей предыдущей публикации [1] говорилось о применении формулы Симпсона [10], о трудностях с выбором числа разбиений отрезка (0,  $\varphi$ ) в формуле (2), а также о возможности построения кубического сплайна [14, 15].

Прежде всего, выясним, какую минимальную по трудоемкости процедуру расчета полного эллиптического интеграла 2-го рода ( $\varphi = \pi/2$  в формуле (2), далее сокращенно ПЭИ2) можно найти в литературе. В сборнике [16] представлена процедура *elliptic2* (алгоритм 56б, на языке АЛГОЛ-60), содержащая 13 опе-

раций. В сборнике [17] представлена процедура *elliptic* (алгоритм 165б, на языке АЛГОЛ-60), вычисляющая полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода, содержащая 10 операций и 14 в итерационном цикле.

Наконец, в интернет-публикациях [18] представлены приближенные формулы для  $E(\pi/2, k)$ , наиболее точной, на наш взгляд, является вторая формула С. Рамануджана:

$$L_{1/4}^{(R)} = \pi(1 + \gamma)[1 + \Delta / (10 + \sqrt{4 - \Delta})] / 4, \quad (3)$$

где  $\Delta = 3[(1 - \gamma) / (1 + \gamma)]^2$  и индекс 1/4 означает четверть безразмерного периметра ( $P/a$ ) эллипса.

Точное значение, согласно формуле (2):

$$L_{1/4} = E(\pi/4, k) = \int_0^{\pi/4} (1 - (k \sin t)^2)^{1/2} dt, \quad (4)$$

а для коэффициента сжатия и эксцентриситета имеем соотношение:

$$k^2 = 1 - \gamma^2.$$

В таблицах [8, 9] представлены значения  $L_{1/4}^{\text{table}} \cong E(\pi/4, k)$  через 1 град, а вместо эксцентриситета используется вспомогательный угол  $k = \sin \alpha$ , и еще имеем  $\gamma = \cos \alpha$ .

В табл. 2 представлено расчетное отличие величин (3) и  $L_{1/4}^{\text{table}} : \varepsilon = |1 - L_{1/4}^{(R)} / L_{1/4}^{\text{table}}|$  с ростом угла  $\alpha$ .

Таблица 2

### Зависимость относительной разности значений ПЭИ2 табличных и по формуле С. Рамануджана от «эксцентриситетного» угла $\alpha$

$\alpha$ (град)	$\varepsilon$
0	$0,2338 \cdot 10^{-5}$
10	$0,8213 \cdot 10^{-5}$
20	$0,5216 \cdot 10^{-6}$
30	$0,2575 \cdot 10^{-4}$
40	$0,2889 \cdot 10^{-4}$
50	$0,2995 \cdot 10^{-4}$
60	$0,3631 \cdot 10^{-4}$
70	$0,1993 \cdot 10^{-4}$
80	$0,1219 \cdot 10^{-4}$
90	$0,4023 \cdot 10^{-3}$

Формула Рамануджана (3) будет использована для вспомогательных целей, а основная – найти экономичную (по времени) процедуру расчета неполного эллиптического интеграла 2-го рода  $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (1 - (k \sin t)^2)^{1/2} dt$ .

Программы расчета указанного интеграла по квадратурной формуле Симпсона с заданной точностью имеются в публикациях [19–22], тем не менее в справочном пособии [16] имеется объемная процедура *ellint* (алгоритм 73б, на языке АЛГОЛ-60, 46 строк) со ссылкой на статью [23].

Процедуры вычисления интегралов по формуле Симпсона с заданной допустимой погрешностью имеются на языке АЛГОЛ-60: алгоритм 182б–в [17]; алгоритм 145б–в [19]; стр. 52,80–в [20], а также на языке ПАСКАЛЬ: –в [21], пар. 5.6; [22], стр. 303.

Окончательный текст процедуры принят согласно [21]. Был проведен расчет значения ПЭИ2 с заданной погрешностью  $10^{-3}$  и осуществлено сравнение с формулой Рамануджана в том же диапазоне углов  $\alpha = 0, 10^\circ, 20^\circ, 90^\circ$  ( $k = \sin \alpha$ ).

Максимальная относительная разность оказалась равной  $3,526 \cdot 10^{-3}$ . Результаты иллюстрирует табл. 3, где обозначено:

$$\varepsilon = \left| 1 - L_{1/4}^{(Sim pson)} / L_{1/4}^{(R)} \right|$$

Таблица 3

**Зависимость относительной разности значений ПЭИ2 формульных С. Рамануджана и квадратурных Симпсона от «эксцентриситетного» угла  $\alpha$**

$\alpha$ (град)	$\varepsilon$
0	0
10	$0,8985 \cdot 10^{-10}$
20	$0,2432 \cdot 10^{-7}$
30	$0,6898 \cdot 10^{-6}$
40	$0,7934 \cdot 10^{-5}$
50	$0,5645 \cdot 10^{-4}$
60	$0,2966 \cdot 10^{-3}$
70	$1,22 \cdot 10^{-3}$
80	$3,526 \cdot 10^{-3}$
90	$5,371 \cdot 10^{-4}$

Все вышесказанное относилось к исторически сложившейся параметризации эллипса  $(x, y) = (a \text{Sint}, b \text{Cost})$ . Однако далее будем использовать более удобную, на наш взгляд, параметризацию  $(x, y) = (a \text{Cost}, b \text{Sint})$ , так как в пределе  $b \rightarrow a$   $t$  – полярный угол. Все полученные выше цифры справедливы, так как для ПЭИ2 имеет место:

$$\int_0^{\pi/4} (1 - (e \text{Sint})^2)^{1/2} dt = \int_0^{\pi/4} (1 - (e \text{Cost})^2)^{1/2} dt,$$

где  $e = \sqrt{1 - \gamma^2}$  – эксцентриситет (более удачное, на наш взгляд, обозначение, чем  $k$ ). Таким образом, для вычисления расстояния между эвакуационными выходами по дуге эллипса  $L/a = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (1 - (e \text{Cost})^2)^{1/2} dt$ , при последующих исследованиях предполагается использовать квадратурную формулу Симпсона с контролируемой погрешностью и продолжать разработку программы оптимизации размещения эвакуационных выходов аналогично нашим предыдущим публикациям [3, 4].

В дополнение следует отметить, что в тексте статьи [3] были допущены следующие опечатки.

1. Стр. 20, 7-я строка сверху:  $x_B = \cos(\varphi u_i); y_B = \sin(\varphi u_i); i = \overline{1, N_2}$ ; следует читать: « $x_B = \cos(\varphi v_i); y_B = \sin(\varphi v_i), i = \overline{1, N_2}$ ».
2. Стр. 21, 9-я строка снизу:  $x_{P3} = R_1(R_1 \cdot x_A - C_1 \cdot y_A); y_{P3} = (R_1^2 - x_A \cdot x_P) / y_A$ ; следует читать:  $x_{P3} = R_1(R_1 \cdot x_A - C_1 \cdot y_A); y_{P3} = (R_1^2 - x_A \cdot x_{P3}) / y_A$ .
3. Стр. 21, 8-я строка снизу: «Знак +, как и ранее, обусловлен предельным переходом  $A_3 \rightarrow E_1$  или знаком в линейной зависимости (7)»; следует читать: «Знак +, как и ранее, обусловлен предельным переходом  $A_3 \rightarrow L_1$ ».
4. Стр. 21, 7-я строка снизу: «Если  $x_B < x_{PA3}$ , то...»; следует читать: «Если  $x_B < x_{PA3}$ , то...».
5. стр. 19, 11-я строка снизу: «Здесь  $Fv, Fuv$  – матрицы размера  $N_2 \times N_2$  и  $N_1 \times N_1$  ...»; следует читать: «Здесь  $Fv, Fuv$  – матрицы размера  $N_2 \times N_2$  и  $N_1 \times N_2$ ...».



## Заключительные замечания

Настоящая работа является подготовительной для последующего оптимального проектирования эвакуационных выходов из обеих сторон коридора эллиптического типа. Следует отметить, что упомянутое проектирование является гораздо более сложной проблемой по сравнению с проектами коридоров кольцевого типа, рассмотренными в наших предыдущих публикациях [3, 4].

## Список литературы

1. Проектирование эвакуационных выходов в зданиях с коридорами эллиптической формы. Схема исследований / *А.В. Голкин, В.Г. Шамонин, С.А. Зуев, С.Ю. Хатунцева* // Актуальные вопросы пожарной безопасности. 2024. № 2 (20). С. 6–12. <https://doi.org/10.37657/vniipo.avpb.2024.96.61.001>.
2. Проектирование эвакуационных выходов в зданиях коридорного эллиптического типа. Ширина коридора / *А.В. Голкин, В.Г. Шамонин, С.А. Зуев, С.Ю. Хатунцева* // Актуальные вопросы пожарной безопасности. 2024. № 3 (21). С. 6–14. <https://doi.org/10.37657/vniipo.avpb.2024.69.92.001>.
3. Проектирование эвакуационных выходов в зданиях коридорного кольцевого типа. Широкий коридор / *В.Г. Шамонин, А.В. Голкин, С.А. Зуев, С.Ю. Хатунцева* // Актуальные вопросы пожарной безопасности. 2023. № 4 (18). С. 16–24. <https://doi.org/10.37657/vniipo.avpb.2023.13.77.002>.
4. Проектирование эвакуационных выходов в зданиях коридорного кольцевого типа. Узкий коридор / *А.В. Голкин, В.Г. Шамонин, С.А. Зуев, С.Ю. Хатунцева* // Актуальные вопросы пожарной безопасности. 2024. № 1 (19). С. 6–9. <https://doi.org/10.37657/vniipo.avpb.2024.20.45.001>.
5. *Анакаев К.Н.* Аналитическое определение длины дуги эллиптической кривой // Известия РАН. Механика твердого тела. 2019. № 5. С. 150.
6. *Анакаев К.Н.* О полных эллиптических интегралах 3-го рода в задачах механики // ДАН, 2017. Т. 473, № 2. С. 151.
7. *Анакаев К.Н.* Эллиптические интегралы в нелинейных задачах механики // Доклады РАН. Физика, техн. науки. 2020. Т. 491. С. 24.
8. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. Москва: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1968. 344 с.
9. *Сикорский Ю.С.* Элементы теории эллиптических функций. Москва: Ком-книга, 2006. 368 с.
10. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. Москва: Наука, 1969. 800 с.
11. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Функции Ламе и Матье / пер. с англ. Н.Я. Виленкина. Москва: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1967. 299 с.
12. *Прасолов В.В., Соловьев Ю.П.* Эллиптические функции и алгебраические уравнения. Москва: Изд-во МЦНИО, 2022. 317 с.
13. *Пархомовский Я.М.* Приближенные формулы для эллиптических интегралов и примеры приложения их к двум задачам нелинейной статики упругих блоков // Ученые записки ЦАГИ, 1978. Т. IX, № 4. С. 75.
14. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. Москва: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1989. 432 с.
15. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. Москва: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1980. 536 с.

16. Агеев М.И., Алик В.П., Марков Ю.И. Библиотека алгоритмов 516–1006. Вып. 2. Москва: Советское радио, 1976. 136 с.
17. Агеев М.И., Алик В.П., Марков Ю.И. Библиотека алгоритмов 1516–2006: справочное пособие. Вып. 4. Москва: Радио и связь, 1981. 184 с.
18. Эллипс // Википедия: сайт: <https://ru.wikipedia.org/wiki/Эллипс> (дата обращения: 12.08.2024).
19. Агеев М.И., Алик В.П., Марков Ю.И. Библиотека алгоритмов 1016–1506: справочное пособие. Вып. 3. Москва: Советское радио, 1978. 128 с.
20. Балугев А.Н., Даугавет В.А. Сборник упражнений по АЛГОЛ-60. Ленинград: изд-во ЛГУ, 1967. 88 с.
21. Мудров А.Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, ФОРТРАН и ПАСКАЛЬ. Томск: МП «РАСКО», 1991. 272 с.
22. Ракитин В.И., Первушин В.Е. Практическое руководство по методам вычислений с приложением программ для персональных компьютеров. Москва: Высшая школа, 1998. 383 с.
23. A.R. DiDonato and A.V. Hershey. New formulas for computing incomplete elliptic integrals of the first and second kind. Journal of the ACM, 6(4): 515-526, October 1959.

**Статья поступила в редакцию 01.08.2024;  
одобрена после рецензирования 16.09.2024;  
принята к публикации 14.10.2024.**

**Голкин Алексей Викторович** – заместитель начальника отдела. Тел. (495) 524-82-53. E-mail: 2102pro@mail.ru; **Шамонин Валерий Геннадьевич** – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник. Тел. (495) 524-82-57. E-mail: k708@yandex.ru; **Зуев Станислав Анатольевич** – кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник. Тел. (495) 524-81-74. E-mail: k708@yandex.ru; **Хатунцева Светлана Юрьевна** – начальник сектора. Тел. (495) 524-81-74. E-mail: lu2986@yandex.ru.

Всероссийский ордена “Знак Почета” научно-исследовательский институт противопожарной обороны Министерства Российской Федерации по делам гражданской обороны, чрезвычайным ситуациям и ликвидации последствий стихийных бедствий (ФГБУ ВНИИПО МЧС России), г. Балашиха, Московская область, Россия.

**Alexey V. Golkin** – Deputy Head of Department. Phone: (495) 524-82-53. E-mail: 2102pro@mail.ru; **Valery G. Shamonin** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher. Phone (495) 524-81-74. E-mail: k708@yandex.ru; **Stanislav A. Zuev** – Candidate of Technical Sciences, Leading Researcher. Phone: (495) 524-81-74. E-mail: k708@yandex.ru; **Svetlana Yu. Khatuntseva** – Chief of Sector. Phone: (495) 524-81-74. E-mail: lu2986@yandex.ru.

All-Russian Research Institute for Fire Protection (VNIIPPO), the Ministry of the Russian Federation for Civil Defence, Emergencies and Elimination of Consequences of Natural Disasters (EMERCOM of Russia), Balashikha, Moscow region, Russia.